



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TÁVKÖZLÉSI ÉS MÉDIAINFORMATIKAI TANSZÉK

Távközlési hálózatok földrajzilag korrelált meghibásodásainak modellezése és felsorolása

Vass Balázs

Tézisfüzet

Témavezető:

Tapolcai János

Nagysebességű Hálózatok Laboratórium
Távközlési és Médiainformatikai Tanszék
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Budapest,
2021

1. Bevezető

Az internet napjainkra kritikus infrastruktúrává vált. A távközlési szolgáltatások fontossága miatt a hálózatok regionális meghibásodásaira való felkészültségének javítása egyre égetőbb kérdés [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]. A súlyos hálózati kiesések többsége katasztrófa (például földrengés, hurrikán, szökőár, tornádó stb.) miatt következik be, amely egy adott földrajzi területen számos (vagy minden) hálózati elemet működésképtelenné tesz. Az ilyen meghibásodásokat *regionális hibáknak* nevezzük. Számos tanulmány érintette azt a problémát, hogy miként lehet felkészíteni a hálózatokat a regionális hibák kiküszöbölésére. Az első megoldások azt feltételezték, hogy az azonos vezetékben vagy minden hálózati csomópont 50 km-es körzetében lévő optikai szálak egyidejűleg meghibásodnak [13, 14]. Ezeket a megoldásokat tovább javították a különböző típusú katasztrófák (pl. földrengések szeizmikusveszély-térképei) történeti adatainak megvizsgálásával és a katasztrófák melegágyainak azonosításával [2, 5, 6, 8, 9, 11]. E megközelítések gyenge pontja, hogy a hálózati berendezések kiépítése során számos kockázatot figyelembe vesznek és kompenzálnak (pl. a földrengésbiztos infrastruktúrák nagyobb szeizmikus aktivitású területeken), ami azt jelenti, hogy a történelmi adatok nem a jelenlegi telepítéseket és kockázatokat reprezentálják. Így realisabb lehet azt feltételezni, hogy bármely fizikailag közeli berendezés nagyobb eséllyel egyidejűleg hibásodik meg. Az újabb tanulmányok (beleértve a doktori disszertációm alapját képezőket is,) pusztán ennek a problémának szenteltek, és a kombinatorikus geometriai alapú megközelítéseket adaptálják az összes regionális hiba feltérképezésére és kompakt módon történő ábrázolására [15, 16, 10, 17, C9, C10, C11], ahol a legnagyobb kihívás az, hogy a regionális hibák tetszőleges helyekkel, formákkal, méretekkel, hatásokkal stb. rendelkezhetnek. Jelen téziszfüzet bemutatja e tudományterület mai állását, melyhez egységes definíciókat, fogalmakat és terminológiát javasol. További olvasmányként ajánlom a [B1] könyvfejezetünket.

Az alábbiakban tárgyalt megközelítések kimenete a hálózat tervezési és menedzsmenteszközeinek inputjaként szolgálhat. A jelenlegi hálózati helyreállítási mechanizmusok úgy vannak tervezve, hogy védjenek egy kis számú előre definiált hibaeseményt. Minden helyreállítási terv megfelel egyes eszközhalmaz meghibásodásának. Informálisan szólva, ha egy kapcsolat meghiúsul, a hálózatnak használatra kész terve van arra, hogyan tudja helyreállítani azt. Technikailag az úgynevezett *közös kockázatú linksoportokat* (*Shared Risk Link Group, SRLG*) a hálózatüzemeltetők határozzák meg, ahol minden SRLG egy olyan linkhalmaz, amelynek együttes meghibásodásának valószínűségét számbaveendőnek ítéljük, és amire fel kell készíteni a helyreállítási mechanizmusokat. Másfelől, a szolgáltatások elérhetőségének lekérdezése megköveteli az SRLG modell probablisztikus kiterjesztését. A valószínűségi értékkel társított SRLG-eket *probabilisztikus SRLG*-knek (*Probabilistic SRLG, PSRLG*) hívjuk. Konkrétabban: a hálózati szolgáltatások elérhetőségének meghatározásához a katasztrófák gyakoriságának ismerete mellett a hálózat minden egyes S linkhalmazához le kell tárolni annak valószínűségét, hogy a *pontosan/legalább* az S linkjei egyidejűleg meghibásodnak a következő katasztrófa során.

Doktori tanulmányaim során egyrészt arra összpontosítottam, hogy miként lehet meghatározni és felsorolni a katasztrófák minden típusát reprezentáló SRLG-listákat. Másrészt, foglalkoztam a PSRLG-listák definiálásának kérdésével is, amelyek jól modellezik a katasztrófák okozta linkmeghibásodások korrelált természetét, és kezelhető méretűek.

2. Kutatási célkitűzések

A dolgozat célja a hiányzó modellek és kapcsolódó algoritmusok létrehozása, amelyek a távközlési hálózatok regionális hibák elleni védelmének összetett geometriai problémájából tisztán kombinatorikus és valószínűségi problémákként kiemelik a hálózat számára lényegi elemeket. Ez a kiemelés lehetséges hibák (valószínűségi) felsorolását kell szolgáltatassa. A hálózat sérülékeny régióinak felsorolásához a legjobb

módszer a következők függvénye: (1) a hálózati topológián rendelkezésre álló geometriai adatok, (2) a lehetséges katasztrófák (probabilisztikus) hatása a hálózat területén, és (3) a kívánt kimeneti struktúra (SRLG / PSRLG). Vannak olyan esetek, amikor triviális, hogy mi a legtöbb, amit tehetünk. Például, amikor egyáltalán nincs információnk a hálózati topológiánk földrajzi beágyazásáról, akkor a legokosabb, amit a sebezhető régiók felsorolásaként tehetünk, az, hogy felsoroljuk az egyes hálózati csomópontok vagy linkek $k = 1, 2, \dots$ -szomszédságait (vö. [B1]/1.3.2A). Ezekkel az esetekkel ellentétben ez a dolgozat néhány, a későbbiekben tárgyalt, nem triviális valós életben előforduló probléma-verzióval foglalkozik.

Az 1. és 2. tézis célja tömör SRLG-listákkal szolgáló modellek és kapcsolódó algoritmusok bemutatása. A disszertáció első részében (1. tézis) feltételezzük, hogy (1) pontos ismerettel rendelkezünk a hálózat földrajzi beágyazásáról, de (2) a jövőbeni katasztrófáknak csak a maximális rombolási sugara ismeretes, és ezen információk alapján (3) SRLG-listát szeretnénk kimenetként kapni. Fő célom az volt, hogy elméleti felső határokat adjak a maximális SRLG-k számára és számítási idejére.

A 2. tézisben csak a hálózat sematikus térképét kapjuk meg (mint például ha egy internetszolgáltató bérlő a hálózat egy részét egy fizikaiinfrastruktúra-szolgáltatótól), és regionálishiba-védelmet szeretnénk. Dolgozatom ezen részében egy olyan modell létrehozása a cél, amely képes kezelni a topológiának ezt az "elmosódott" ábrázolását, és regionális SRLG-k egy tömör listáját szolgáltatja polinomiális időben. A modellt elméleti és gyakorlati szempontból egyaránt értékeltem.

Dolgozatom utolsó részében (3. tézis) a valós hibaveszélyeket leíró PSRLG-k biztosítását tűztem ki célul. Valóság-hű PSRLG-k számításához az következőkre van szükség: (1) a hálózat pontos geometriai ábrázolása, (2) részletes ismeretek a lehetséges jövőbeni katasztrófa-eseményekről, és végül (3) egy modell, amely ezt az információt pontos, mégis tömör PSRLG-listákként ábrázolja. A 3. tézisben a) standard PSRLG adatstruktúrákat, és b) korszerű valószínűségi hibamodellt, ajánlottam, és végül c) a modellt valós hálózati topológiákon és valós katasztrófaadatokon teszteltem.

3. Módszertan

A modellezés és algoritmuskidolgozás során széles körben alkalmaztam a kombinatorikus optimalizálás és a geometria eszközeit. Eredményeim elsősorban a gráfelméletre, a geometriai algoritmusokra, a bonyolultságelméletre és a valószínűségszámításra támaszkodnak. Mindemellett a probléma összetettsége megkövetelte a *szimulációs* eszközök széleskörű használatát.

A javasolt módszereket a Python 3.5-ben valószínűsítettem meg, majd szimulációk segítségével igazoltam azok helytállóságát és hatékonyságát.

4. Új eredmények

Amikor egy esemény következtében több hálózati elem együttesen meghibásodhat, gyakran *közös kockázatú csoport*ként (Shared Risk Group, SRG) jellemzik őket. Minden SRG-nek van egy megfelelő meghibásodási eseménye (vagy eseményei); ilyen esemény bekövetkeztekor az SRG összes eleme meghibásodik. Pontosabban, a kommunikációs hálózatot egy $G = (V, E)$ gráfként modellezzük, amelynek csúcsai route-rek, PoP-ok¹, az optikai keresztkapcsolatok (OXC) és a felhasználók, míg élei kommunikációs kapcsolatok (többnyire optikai szálak). Az SRG-ket ezután $\langle V', E' \rangle$ részgráfként definiáljuk, ahol $V' \subseteq V$ és $E' \subseteq E$.

Sok esetben elegendő csak a a gráf éleit (a *linkeket*) figyelembe venni az SRG-kben, és ebben az esetben ezeket a csoportokat *közös kockázatú linkcsoportnak* (Shared Risk Link Group (SRLG)) hívják. Például egy SRLG tartalmazhat egyetlen élt (az egyszeres linkhiba modellezéséhez), vagy az összes élt, amely egy csúccsal szomszédos (egyszeres csomópont-hiba jellemzéséhez). Az SRLG-k lehetnek összetettebbek

¹A jelenléti pont (point of presence, PoP) egy mesterséges demarkációs vagy interfészpont a kommunikáló felek közt.

is, jelenthetik több hálózati elem egyidejű meghibásodását is. Ebben a tézisfüzetben különösen azokra a földrajzilag összefüggő katasztrófákra összpontosítunk, melyek következtében egy adott régió belüli hálózati elemek működése egyszerre vall kudarcot.

Egy \mathcal{S} SRLG-készlet felhasználható a hálózat tervezéséhez és a hálózat helyreállítási/védelmi mechanizmusaihoz annak biztosítására, hogy ezen mechanizmusok fenntartsák a hálózat működését az ezen SRLG-knek megfelelő hibák esetén. Például, egy adott csomópontpár közötti kapcsolat biztosítása érdekében a védelmi mechanizmusok két él-diszjunkt utat hozhatnak létre, ha $\mathcal{S} = \{\{e\} | e \in E\}$, két csomópont-diszjunkt utat, ha $\mathcal{S} = \{\{(u, v) \in E\} | v \in V\}$, vagy két, azonos földrajzi régió át nem haladó utat, ha \mathcal{S} megfelel az összes fizikailag közeli linkek halmazainak.

A következő definíció a regionális hibák, például természeti katasztrófa vagy támadás által okozott SRLG fogalmát foglalja magában. A bemutatás megkönnyítése érdekében ezeket a hibaeseményeket *katasztrófáknak* nevezzük, függetlenül azok okától.

4.1. Definíció (SRLG). *Az $S \subseteq E$ linkhalmaz egy SRLG, ha feltételezhetjük, hogy olyan katasztrófa következik be, amely az S összes élének együttes meghibásodását okozhatja. Ha a katasztrófát a kétdimenziós síkban egy körülhatárolt $D \subset \mathbb{R}^2$ földrajzi terület jellemzi, és S a D -vel metsző élek halmaza, akkor az S halmazt a D -t képviselő regionális SRLG-nek hívjuk, jelölése $S = \text{SRLG}(D)$. Ha a D egy korong, akkor az $\text{SRLG}(D)$ -t körhibának hívjuk.*

Az irodalomban a legelterjedtebb a korong alakú katasztrófaterületek $p \in \mathbb{R}^2$ meghibásodási epicentrummal és $r \in \mathbb{R}$ hibasugárral való jellemzése. Ebben az esetben $S = \{e \in E | d(e, p) \leq r\}$, ahol $d(e, p)$ az euklideszi távolság az e él és a p pont között.

4.1. Adott r sugarú korongok által indukált maximális SRLG-k

1. Tézis. [C7, C10, J4, J5] *Polinomiális futásidejű algoritmusokat adtam az euklideszi síkba és gömbre ágyazott hálózatok azon maximális M_r^p , illetve M_r^s linkhalmazainak (SRLG-inek) felsorolására, melyeket egyszerre meghibásíthat egy r sugarú koronggal felülbecsült katasztrófa. Elméleti felső korlátokat adtam M_r^p és M_r^s számosságára. Végül, megvizsgáltam M_r^p és M_r^s hasonlóságát a gyakorlatban.*

1.1. Tézis. [C10, J4] *Ajánlottam egy algoritmust, mely a hálózati topológia egyenes élű síkbaágyazott $G(V, E)$ gráfként való reprezentálása esetén egy r sugarú korong által élenként metszhető maximális élhalmazok M_r^p listáját $O((|V| + x) (\log |V| + \phi_r^2 \rho_r^5))$ időben kiszámolja, ahol x az élkereszteződési pontok száma, ρ_r az r sugarú korong által metszhető élek maximális száma, és végül, ϕ_r egy él $3r$ sugarú környezetében levő csúcsok maximális száma. Bizonyítottam, hogy az ajánlott algoritmus komplexitása éles $|V|$ -ben. Bizonyítottam, hogy M_r^p számossága $O((|V| + x) \rho_r)$, és azt, hogy e korlát éles. Bizonyítottam, hogy $\bigcup_{0 < r' < r} M_{r'}^p$ számossága $O((|V| + x) \rho_r^2)$.*

Hangsúlyozom, hogy bár ugyanezt a problémát vizsgáltam az M.Sc.-s diplomamunkámban [T1], mind az M_r^p listát kiszámoló algoritmus elméleti bonyolultsága, mind a lista számosságának elméleti felső becslése javult. Ezenkívül bebizonyítottam, hogy bizonyos körülmények között a [J4]-ben bemutatott továbbfejlesztett algoritmus bonyolultsága optimális a hálózati csomópontok $|V|$ számában. A következőkben bemutatom az eredmények mögött álló főbb gondolatokat.

A [C10] cikkben bemutattam egy, az M_r listát alacsony polinomiális időben kiszámoló algoritmust a hálózat egyenes élű gráfként való síkbaágyazása esetén. Megmutattam, hogy $|M_r|$ lineáris a hálózat csúcsainak n számában, és M_r kiszámítása n -ben négyzetes időt igényel [C10, 6. tétel]. A szimulációk szerint e lista számossága a gyakorlatban $\approx 1.2n$.

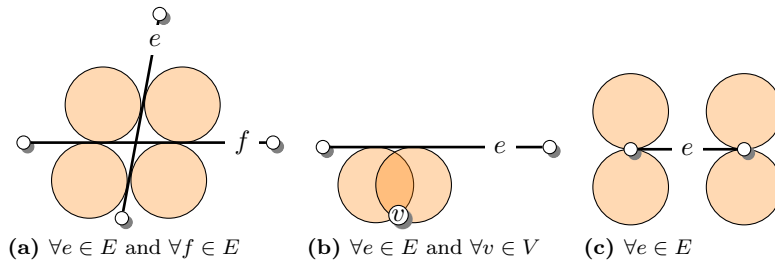
Pontosabban fogalmazva az elméleti eredményeket, [C10, 4. következmény] szerint az M_r -beli SRLG-k száma legfeljebb egyenesen arányos a következők szorzatával: 1) a csomópontok és élkereszteződési pontok

Algoritmus 1: A [C10]-ben ajánlott algoritmus vázlata

Bemenet: $G = \langle V, E \rangle$ síkbaágyazott gráf, r sugár
Kimenet: az r sugarú korong alakú katasztrófa által metszett maximális SRLG-k M_r listája.

```

begin
1   $M'_r := \emptyset$ ;
2  Kiszámol:  $X := \{\text{points of edge crossings}\}$ ;
3  for  $w \in V \cup X$  do
4    Meghatároz:  $E_w := \{\text{edges not further from } w \text{ than } 3r\}$ ;
5    for  $e_1, e_2 \in E_w$  do
6      Kiszámol: az 1/(a). ábrán leírt  $c_i$  körök
    end
7    for  $e \in E_w$  do
8      Kiszámol: az 1/(b). ábrán leírt  $c_j$  körök, a  $w$  csúcsot pontként használva ;
9      Kiszámol: az 1/(c). ábrán leírt körök;
    end
10   Frissít:2 az  $M'_r$  listát szerre a  $c_i, c_j, c_k$  korongok által metszett élhalmazokkal
11 end
return  $M'_r$  as  $M_r$ 
end
  
```



1. ábra. A vizsgált koronghibák.

$n+x$ száma, és 2) a tartalmazott legnagyobb linkhalmazok ρ_r számossága. A számítási idő $O((n+x)^2 \rho_r^5)$ [C10, 6. tétel]. Megjegyzem, hogy x értéke 0, vagy egy kis szám, és a szimulációs eredmények alapján ρ_r lineárisan nő r függvényében, mely $O(n^2 r^5)$ mértékű gyakorlati futásidőt sugall $r > 0$ esetén.

A következőkben áttekintést adok a javasolt algoritmusról (1. algoritmus), amely geometriai megfontolások sorozatára támaszkodik. A legfontosabb a [C10] 1. tétele, amely kihasználja azt, hogy a végtelen sok lehetséges katasztrófaterület maximális romboló hatásait a hálózat éleinek számában négyzetes számú korong hatásának ellenőrzésével ki lehet számítani. Pontosabban, egy r pozitív valós szám, és egy r sugarú korong által élenként metszett H nemüres élhalmaz esetén létezik egy (c nevű) r sugarú korong, amely a H minden élét metszi, és legalább az egyik a következő állítások legalább egyike igaz rá (lásd az illusztráló 1. ábrát): (a) van két H -ban található nem párhuzamos link, mindkettőt c egyetlen pontban metszi, és ez a két pont különböző; (b) van két link van a H -ban oly módon, hogy a c metszi mindkettőt közülük egyetlen pontban, ez a két pont különböző, és az egyik a az egyik link végpontja; (c) a c korong érinti egy $e \in H$ egyenesét e egy végpontjában.

Intuitíven nincs ok arra, hogy ellenőrizzük az 1. ábrán leírt köröket két olyan hálózati elem esetén, amelyek sokkal távolabb vannak egymástól, mint a katasztrófa r sugara. [J4] szerint valóban fel lehet építeni a globális problémamegoldását helyi számítások alapján, az alábbiak szerint. Legyen X a link-metszéspontok halmaza. X meghatározása után minden $w \in V \cup X$ -re a w -tól $3r$ -nél nem messzebbi linkeket egy E_w halmazba gyűjtve, majd meghatározva az E_w halmazok maximális hibáit, és végül az eredményül kapott listák maximális elemeit összegyűjtve épp M_r -t kapjuk. Ez megtehető az 1.1 tézisben állított $O((|V| + x) (\log |V| + \phi_r^2 \rho_r^5))$ időben.

Alsó korlátot adtam a számítási bonyolultságra, kihasználva [18] 4. lemmáját. Nevezetesen, bebizonyítottam, hogy $\Omega(|V| \log |V|)$ idő szükséges annak igazolásához, hogy nem létezik két metsző link, vagy más szavakkal, az M_r^p kiszámítása a $r = 0$ speciális esethez $\Omega(|V| \log |V|)$ időre van szükség. Ez a

²Itt az M' az eddig megvizsgált élhalmazok közül a maximálisok gyűjteménye, és ha f maximális köztük, hozzáadjuk M' -hez, majd f összes részahalmazát kitöröljük M' -ből; vagy ha f nem maximális M' -ben, semmi sem történik.

felső korláttal együtt azt jelenti, hogy az M_r^P kiszámításához a csomópontok számának legjobb időbeli komplexitása $\Theta(|V| \log |V|) \cdot f(x, \phi_r, \rho_r)$, ahol $f()$ a paraméterek függvénye.

M_r^P származásának felső korlátja bizonyos geometriai megfontolásokkal bizonyítható, amelyek azt mutatják, hogy az 1. ábra szerinti geometriai objektumpárokból legfeljebb $O((|V| + x)\rho_r)$ van, amelyeket ellenőrizni kell az esetleges maximális meghibásodásokat keresve.

1.2. Tézis. [C7, J5] *Javasoltam egy heurisztikát, mely egy gömbre rajzolt $G(V, E)$ hálózati topológia esetén, melynek élei geodézislánc alakúak, egy kellőképpen sűrű \mathcal{P} katasztrófaközéppont-halmazt véve $O(|\mathcal{P}|[(|V| + x)\gamma + |\mathcal{P}|\rho_r])$ időben kiszámítja az r sugarú korongok által élenként metszett maximális élhalmazok M_r^s listáját, ahol x az élmetszéspontok száma, γ az egy linket alkotó geodézisek maximális száma, és ρ_r egy r sugarú korong által metszhető élek maximális száma. Szimulációkon keresztül megmutattam, hogy M_r^s és M_r^P különbözhet a gyakorlatban, azaz pontosabb az SRLG-listákat a gömbi reprezentáció segítségével számolni. Mindemellett a hálózat síkban történő reprezentációja által okozott torzulás sokszor kevesebb pontatlanságot eredményez, mint a katasztrófa-jellemzők ismeretének hiánya. Arra a következtetésre jutottam, hogy ezen esetekben a síkbeli reprezentáció a sérülékeny régiók felderítésének célját elegendően jól szolgálja.*

A következőkben bemutatok egy heurisztikát, mely alkalmas mind M_r^P , mind M_r^s kiszámítására.

Egy P síkbeli vagy gömbön levő pont és egy $v \in V$ csomópont esetén legyen a csomópont-távolság pár $[v, d(v, P)]$, ahol $d(v, P)$ a v és a P távolsága. Legyen $e(P)$ az a lista, amely az összes $e \in E$ link-távolság párját tartalmazza, a linkek lexikografikus sorrendje szerint rendezve. Legyen $e(P)_{\text{hit}}$ azon linkek rendezett listája, amely legfeljebb r messze vannak P -től. Könnyen belátható, hogy egy adott P ponthoz mind az $e(P)$, mind az $e(P)_{\text{hit}}$ kiszámítható $O((n + x)\gamma)$ időben. Informálisan szólva a terv ezeknek a listáknak a meghatározása egy "elég sűrű" pontkészlethez ahhoz, hogy a csomópont-távolság és az él-távolság listák alapján meghatározhassuk a maximális SRLG-listákat. Jelölje a \mathcal{P} azon P pontok halmazát, amelyekhez ki akarjuk számolni az $e(P)$ link-távolság listákat.

Maradjunk egy pillanatra a síkbaágyazott hálózatoknál. Intuitíven, kiszámíthatjuk a M_r^P értéket úgy, hogy egy kellően finom (tegyük fel, hogy $1 \text{ km} \times 1 \text{ km}$ négyzetekből álló) rács rácsponthai alkotják a \mathcal{P} -t. A gömbön hasonló szép fedést kell választanunk. Legyen d_P a G gráf geometriai beágyazásának (zárt) konvex burkában levő geometriai helyek maximális távolsága a \mathcal{P} halmaz legközelebbi pontjáiig, azaz $d_P := \max_{t \in \text{conv}(G)} \min_{p \in \mathcal{P}} \text{dist}(p, t)$. Legyen E_1 és E_2 halmazoknak két halmaza. Előbbiek kapcsolatát $E_1 \supseteq E_2$ -vel jelöljük pontosan akkor, ha minden $e_2 \in E_2$ esetén létezik olyan $e_1 \in E_1$, amire $e_1 \supseteq e_2$.

A 2. algoritmus egy példaheurisztika M_r^g meghatározására. Azt állítjuk, hogy a 2. algoritmus meghatároz egy H_r^g hibalistát $O(|\mathcal{P}|[(n + x)\gamma + |\mathcal{P}|\rho_r])$ időben. Továbbá, $M_r^g \supseteq H_r^g \supseteq M_{r-d_P}^g$. A komplexitásra térve, egy \mathcal{P} -beli P pontra ki kell számítsuk $e(P)_{\text{hit}}$ -et, aminek bonyolultsága $O((n + x)\gamma)$, majd frissíteni kell a maximálisnak feltételezett hibák listáját $e(P)_{\text{hit}}$ -vel, mely $O(|\mathcal{P}|\rho_r)$ időben megtehető, mert e lista legfeljebb $|\mathcal{P}|$ darab, legfeljebb ρ_r élt tartalmazó rendezett élhalmazból áll. Másrészt, $M_r^g \supseteq H_r^g$ nyilvánvaló, mivel az algoritmus az r sugarú korongoknak csak egy részét vizsgálja meg, míg minden $\text{conv}(G)$ -beli t ponthoz létezik olyan $p \in \mathcal{P}$ pont, melyre a $c(t, r - d_P)$ korong része $c(p, r)$ -nek, így $H_r^g \supseteq M_{r-d_P}^g$.

Kihasználva, hogy a katasztrófaterületek alakja zárt korong, következik, hogy bármely adott hálózatra $\lim_{d_P \rightarrow 0} H_r^g = M_r^g$. Mint láttuk, $M_r^g \supseteq H_r^g \supseteq M_{r-d_P}^g$, így az előbbiek alapján, ha az r sugarú katasztrófáktól akarjuk védeni a hálózatot, a 2. algoritmust kell futtatni, a sugarat $r + d_P$ -re inicializálva.

Így egy heurisztikánk van M_r^s kiszámítására: ha adott \mathcal{P} halmazra, $H_{r+d_P}^g = H_r^g$, akkor a 2. algoritmus polinomiális időben meghatározza az M_r^g listát; különben egy sűrűbb \mathcal{P} ponthalmazzal újrapróbálkozunk.

Fontos kérdés, hogy a gyakorlatban a hálózat milyen földrajzi kiterjedése mellett lehet azt mondani, hogy az SRLG-k felsorolása szempontjából közömbös, hogy a hálózat gömbi vagy síkbeli ábrázolását

Algoritmus 2: Heurisztika az r sugarú katasztrófák által generált maximális SRLG-listák meghatározásához

Bemenet: $G(V, E)$, r , \mathcal{P} , g geometriatípus, csúcsok koordinátái, és élek töröttvonalai (geodézisláncjai)
Kimenet: M_r^g

```

begin
1  for  $P \in \mathcal{P}$  do
2  |   meghatároz:  $e(P)_{\text{hit}}$ ;
3  |   if  $e(P)_{\text{hit}} \neq \emptyset$  then
4  |   |   frissít:  $M_r^g$  listát  $e(P)_{\text{hit}}$  halmazzal // A 3.
      |   |   Algoritmus szerint
      |   end
   end
5  return  $M_r^g$ 
end

```

Algoritmus 3: M SRLG-lista frissítése f hibával

Bemenet: M SRLG lista, f hiba (élmalmaz)
Kimenet: M frissítve f -fel

```

begin
1  maximális:=Igaz ;
2  for  $f_M \in M$  do
3  |   if  $f \subseteq f_M$  then
4  |   |   maximal:=Hamis
      |   end
   end
5  if maximális then
6  |    $M := M \cup \{f\}$  ;
7  |   for  $f_M \in M$  do
8  |   |   if  $f \supset f_M$  then
9  |   |   |    $M := M \setminus \{f_M\}$ 
      |   |   end
      |   end
   end
10 return  $M$ 
end

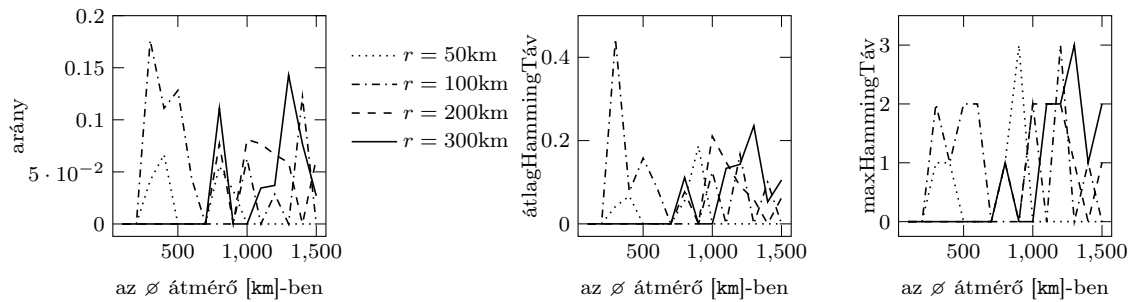
```

vesszük figyelembe. Más szóval, csak az M_r listákra összpontosítva, az a kérdés, hogy a fizikai hálózat melyik mérete alatt lesz M_r^p és M_r^s (maximális linkhalmazok, melyek élenként metsz r sugarú korong rendre a síkban és a gömbön) pontosan ugyanaz. A válasz nemcsak a fizikai kiterjedéstől, hanem a hálózat sajátosságaitól is függ: képviselhet sűrű nagyvárosi gerinchálózatot több egymáshoz közeli csomóponttal, de földrajzilag nagyon ritka is lehet. Legyen a τ a hálózat legközelebbi nem szomszédos és nem keresztező linkpárjának távolsága, és a D legyen a G hálózat legkisebb befoglaló körének átmérője. Láthatjuk, hogy csak akkor lehet különbség a M_r^s és az M_r^p között, ha $2r \in [\tau, D]$, a gömbi vagy a síkbeli ábrázolás esetén. A katasztrófaterületek gyakorlati sugara néhány kilométertől néhány száz kilométerig terjed, ami azt jelenti, hogy olyan kicsik lehetnek, hogy nem lehet különbség a SRLG-halmazok között. Ha τ kisebb, mint a katasztrófa átmérője, akkor könnyű találni olyan beállításokat, ahol $M_r^s \neq M_r^p$.

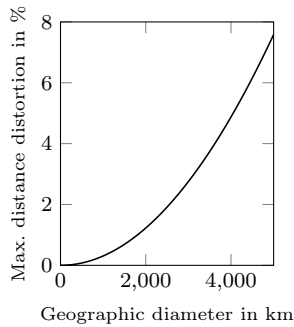
A jelenség részletesebb tanulmányozásához az SRLG-listák két hasonlósági mutatóját használtam: 1) azon SRLG-k arányát, amelyek csak M_r^p és M_r^s egyikében vannak jelen, $\mathcal{M}(r) := |M_r^p \Delta M_r^s| / (|M_r^p| + |M_r^s|) \in [0, 1]$, és 2) egy M_r^s -beli SRLG átlagos és maximális Hamming-távolságát a legközelebbi M_r^p -beli megfelelőjéig. Ezen mutatók értékeit a 2a-2c. ábrákon ábrázoltam. A kiértékelés alapjául egy olasz topológiát vettem (2d. ábra, földrajzi átmérő: $D = 1180\text{km}$), és annak nagyított változatait úgy, hogy a kapott hálózatok átmérője szerre $D = 100, 200, \dots, 1500\text{ km}$ legyen a gömbön. Látható, hogy a legtöbb esetben ezen mutatók értéke 0 (azaz $M_r^p = M_r^s$), de a különböző SRLG-k arányának nagy kiugrásainak is tanúi lehetünk (2a. ábra), csakúgy, mint olyan gömbi SRLG-knek, amelyek szimmetrikus különbsége síkbeli párjukkal 3 linket tartalmaz. Ez utóbbi jelenség akkor következik be, amikor vannak olyan $u, v \in V$ csomópontok, amelyekben $d(u, v) \leq 2r$ pontosan a gömbös és a síkbeli ábrázolás egyikében teljesül.

A két vizsgált SRLG-listában a különböző SRLG-k kicsi és következtelen aránya annak a ténynek köszönhető, hogy bár a Föld felszíne görbült, ez a görbület gyakorlatilag nem jelentős egy kis és közepes méretű ország gerinctopológiája esetén. Például az ortografikus vetület maximális távolságtorzulása Magyarország és Olaszország felett (átmérőik rendre 530 km és $< 1250\text{ km}$) $< 0,1\%$ és $< 0,5\%$ (2e. ábra). Még a kontinentális USA (Alaszka nélkül) is leképezhető $< 4\%$ távolságtorzítással (2f. ábra, [19]).

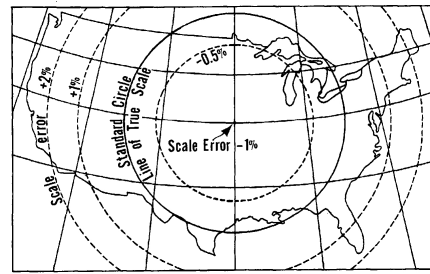
Mivel az M_r^s számítási ideje tapasztalatom szerint megközelítőleg kétszerese volt a M_r^p -ének, a következőket vontam le. M_r^s és M_r^p eltérhetnek, ezért van értelme kiszámítani a SRLG listákat a pontosabb gömbi ábrázolással. Sok esetben azonban a hálózat reprezentációjából adódó torzítás kisebb pontatlanságot okoz, mint a katasztrófa jellemzőivel kapcsolatos ismeretek hiánya (például akár 10% pontatlanság is lehet a katasztrófa sugarának meghatározásában), így a síkbeli ábrázolás elegendően jól szolgálhatja a maximális SRLG-k felsorolásának célját.



(d) az olasz hálózat (átmérő \approx 1180km)



(e) Az ortografikus levetítés skálázási hibája



(f) a rézsütös (oblique) sztereografikus levetítés skálahibája az USA felett $\leq 4\%$ [19]

2. ábra. Pontosabb az SRLG-listákat a gömbi reprezentáció segítségével számolni. Mindemellett a hálózat síkban történő reprezentációja által okozott torzulás sokszor kevesebb pontatlanságot eredményez, mint a katasztrófa-jellemzők ismeretének hiánya. Ezen esetekben a síkbeli reprezentáció a sérülékeny régiók felderítésének célját elegendően jól szolgálja.

4.2. A k csomópontot fedő korong alakú katasztrófák által okozott maximális SRLG-k felsorolása

A magas rendelkezésre állás eléréséhez a jelenlegi legjobb gyakorlat a kapcsolathoz rendelt üzemi és tartalékutak belsőleg (csúcs)függetlenségének biztosítása. Így az üzemi és a tartalékútvonal csomópontjai közötti távolság (kivéve a végpontoknál) legalább 1 ugrásnyi (azaz egy linknyi) távolságra van egymástól. A kimaradások általában a következők miatt keletkeznek: (1) *közeli csomópontok*, azaz két csomópont közel helyezkedik el egymáshoz, például sűrűn lakott területen; (2) *párhuzamos linkek*, azaz két link bizonyos földrajzi okok miatt közel van egymáshoz. Sajnos a hálózati topológiával együtt a geometriai információk kezelése nem része a jelenlegi gyakorlatnak. Ezenkívül az internetszolgáltatók általában egy független vállalatától, a fizikaiinfrastruktúra-szolgáltatótól származó szolgáltatásként bérlik a kapcsolatokat, így az üzemeltetők korlátozott információval rendelkeznek a kapcsolatok útvonaláról vagy a köztes útválasztó csomópontok fizikai koordinátáiról. A 2. tézis javaslatot tesz az üzemi és a tartalékútvonalak közötti földrajzi távolság biztosítására.

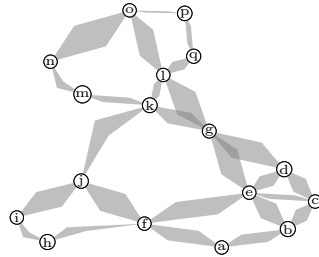
2. Tézis. [C13, C12, C11, J1] *Az üzemi és a tartalékútvonal közti földrajzi távolság biztosítása érdekében a hálózati topológia földrajzi beágyazásának közelítő ismerete esetére javasoltam egy modellt a maximális regionális SRLG-k felsorolására, amely csak a hálózati topológia sematikus térképére támaszkodik. Polinomiális futásidejű algoritmust javasoltam az ebben a modellben leírt hálózatok azon maximális linkhalmazai (SRLG-i) M_k listájának felsorolására, amelyeket egy k csomópontot tartalmazó korong alakú felülbecsült katasztrófaterület élenként metszhet (k tetszőleges). Elméleti felső korlátot adtam az M_k számosságára. A modell és az adatszerkezet kiértékelésével megmutattam, hogy valós hálózati topológiák és gyakorlati (kis) k értékek kombinációja esetén az M_k egy kezelhetően rövid SRLG-lista.*

A tézisben bemutatott korlátozott geometriai információval rendelkező hibamodell meghatározásakor

(2.1. tézis), a következő tervezési céljaim voltak: 1) Nem alábecsülni a lehetséges regionális meghibásodásban érintett kapcsolatok halmazát, 2) Kezeleni a *sematikusan* síkbaágyazott hálózatokat úgy, hogy a kábelek pontos útvonala ismeretlen, 3) Ajánlani egy *gyors és helytakarékos* módot az SRLG-k halmazának kiszámítására ezen körülmények közt (2.2 és 2.3 tézisek).

2.1. Tézis (Korlátozott geometriai információs hibamodell). [J1] *Az üzemi és a tartalékútvonal közti földrajzi távolság biztosítása érdekében a hálózati topológia földrajzi beágyazásának közelítő ismerete esetére a következő modellt javasoltam. A (nem feltétlenül síkbarajzolható) hálózatot egy $G = (V, E)$ irányítatlan összefüggő geometriai gráfként modellezem, $|V| \geq 3$ csomóponttal. A gráf csomópontjai pontokként vannak beágyazva az euklideszi síkba, és pontos koordinátáik ismertek. Ezzel ellentétben az élek pontos helye nem ismeretes, hanem felteszem, hogy minden e élhez tartozik egy azt tartalmazó e^p tartalmazó sokszöglap (vagy egyszerűen sokszöglap, vagy poligon). A katasztrófa-területekről feltételezem, hogy tetszőleges sugarú és középpontú, de legfeljebb k csomópontot érintő kör alakú korongot alkotnak, ahol $k \in \{0, |V| - 2\}$. Az ilyen katasztrófák által okozott meghibásodásokat regionális link- k -csúcs hibáknak nevezem.*

Azt állítom, hogy ez a hibamodell ésszerűen reprezentálja a lehetséges regionális hibákat, anélkül, hogy ismerni kellene a topológia térképének skálázását.



3. ábra. Egy $G = (V, E)$ bemeneti gráf a linkekhez tartozó tartalmazó sokszöglapokkal, $|V| = 17$, a sokszöglapok oldalainak maximális száma $\gamma = 4$.

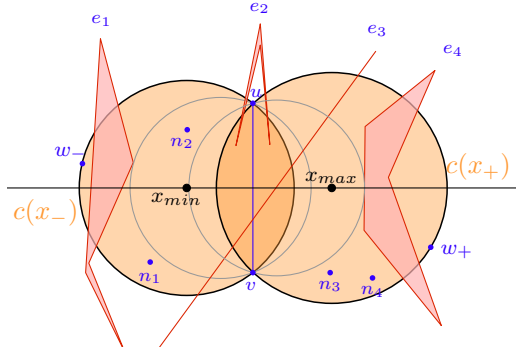
Kimenetünk alapján az üzemeltetők SRLG-diszjunkt üzemi és tartalékútvonalakat generálhatnak, hogy megvédjék a kapcsolatot a természeti katasztrófáktól³. Az üzemi és a tartalékútvonal közötti távolság egyszerű metrika a hibamodell összehasonlítására. A logikai topológia alapján a távolság meghatározásának hagyományos megközelítése az üzemi útvonal által érintett csomópontok és a tartalékos útvonal által érintett csomópontok közötti ugrás-távolság (köztük levő legrövidebb út hossza a topológia gráfjában), kivéve a végcsomópontok környékét. E definíció alapján a hibamodelleket erősségük szerint növekvő sorrendben sorolhatjuk fel [J1]: egyetlen link hibája (≥ 0 -ugrás távolság⁴, de éldiszjunkt útvonalvezetés), egyetlen csomópont meghibásodása (≥ 1 -ugrás távolság), egyetlen regionális link-0-csúcs hiba, egyetlen regionális link-1-csúcs hiba, egyetlen regionális link-2-csúcs hiba, stb.

Úgy vélem, hogy a javasolt megközelítés jól modellezi a lehetséges regionális hálózati hibákat a hálózati eszközök helyéről rendelkezésre álló kevés földrajzi információ alapján.

2.2. Tézis. [J1] *A hálózati topológia euklideszi síkba ágyazott $G(V, E)$ gráfként való értelmezése esetére, ahol minden $e \in E$ link egy kapcsolódó legfeljebb γ oldalú sokszöglap alakú e^p régióban fut valahol, javasoltam egy algoritmust, amely $O(|V|^2((k^2 + 1)\rho_k^3 + \rho_k\gamma + (k + 1 + \log(n\rho_0))\rho_0\gamma))$ időben kiszámítja azon maximális linkhalmazok M_k listáját, amelyeket egy legfeljebb k csomópontot tartalmazó korong alakú katasztrófa élenként metszhet, ahol ρ_k a legfeljebb k csomópontot tartalmazó korong által metszett linkek maximális számát jelöli. Bebizonyítottam, hogy az M_k lista $O(|V|(k + 1)\rho_k)$ elemű.*

³Az útválasztó algoritmusok módosítják azokat az SRLG-ket, amelyek meghibásodása elszigeteli a forrás- és célcso-mópontokat: ezeket az SRLG-ket egy kisebb, nem elszigetelő SRLG-vel helyettesítik a hibamodellnek megfelelően.

⁴Az üzemi útvonal csomópontjai és az SRLG-független védelmi útvonal csomópontjai közötti minimális távolság, kivéve a terminálcso-mópontokat.



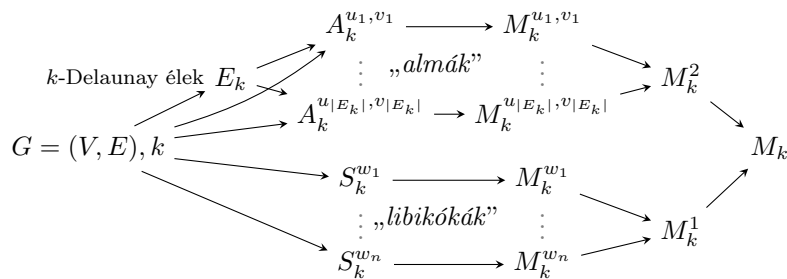
4. ábra. Egy alma ábrázolása $k = 2$ esetén. Az $A_k^{u,v}$ alma a linkek és csomópontok meghatározott rendezett listáiból áll, amelyeket egy $\mathcal{C}_k^{u,v}$ -beli korong egyszerre metszhet. További részletek [J1]-ben.

A javasolt módszer egy sor geometriai (algoritmikus) megfontoláson alapul. A legfontosabb megfigyelés az, hogy M_k bármely elemére létezik egy olyan korong alakú katasztrófa, amelynek belsejében k csomópont van, és amelynek (1) két csomópont van a határán, vagy (2) csak egy u csomópont van a határán, és amelynek a sugara végtelen. Ez lehetővé teszi számunkra, hogy az összes lehetséges maximális meghibásodást egy korongsöpítésnek nevezhető módszerrel az alábbiak szerint soroljuk fel.

Legyen $\{u, v\} \subseteq V$ két olyan csúc, amelyek esetén az azon u -t és v -t érintő körök $\mathcal{C}_k^{u,v}$ halmaza, amelyeknek k csomópont van a belsejében, nem üres. Ezek az $\{u, v\}$ párok a k -Delaunay élek E_k halmazának elemei, és halmazuk alacsony polinomiális idő alatt meghatározható [20, 2.4. tétel]. Definiáltam az $A_k^{u,v}$ alma adatszerkezetet, amely a $\mathcal{C}_k^{u,v}$ -beli korong által metszhető linkek és csúcsok rendezett listáit tartalmazza. Tegyük fel, hogy u és v a 4. ábrán látható módon helyezkednek el. Az $A_k^{u,v}$ segítségével végigsöpörhetünk a $\mathcal{C}_k^{u,v}$ korongokon a középpontjaik abszcisszái szerint rendezve, és közben összegyűjthetjük az egyszerre metszett maximális élhalmazokat egy $M_k^{u,v}$ lista⁵. Ezután az összes $M_k^{u,v}$ lista globálisan maximális elemeit a M_k^2 -ben gyűjtjük össze.

A második esetben hasonlóan kiszámítható azon maximális SRLG-k M_1 halmaza, amelyekhez létezik egy, az SRLG éleit metsző, egyetlen csúcson áthaladó, és legfeljebb k csúcsot tartalmazó félsík, ha minden csomópont körül egy félsík fordítását imitáljuk, miközben ellenőrizzük a metszett linkek halmazát és a tartalmazott csúcsok számát. Végül M_k az M_k^1 és M_k^2 maximális elemeinek összegyűjtésével kapható. A folyamatot az 5. ábra vázolja. A technikai részletek tárgyalása meghaladná e tézisfüzet kereteit.

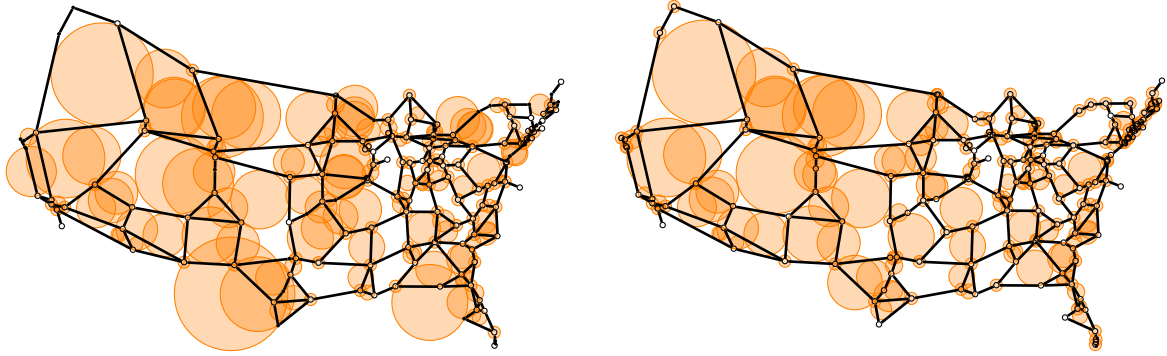
A következőkben numerikus eredményeket mutatok be, amelyek a modellemt néhány reális fizikai hálózaton validálják. A hálózati topológiák a különböző k értékekre kapott SRLG-k listájával együtt online elérhető⁶.



5. ábra. A [J1]-ben bemutatott algoritmus vázlatja azon maximális linkhalmazok M_k halmazának felsorolására, amelyeket egy k csomópontot tartalmazó korong linkenként metszhet.

⁵A javasolt módszer hasonló a geometriai algoritmusok közt számon tartott ún. sweep line (sweep surface) algoritmusokhoz, mint pl., Fortune algoritmus a egy ponthalmaz Voronoj-diagramjának kiszámítására[21].

⁶<https://github.com/jtapolcai/regional-srlg>



(a) töröttvonal: 190 SRLG átlagosan 2.98 linkkel, $\rho_0 = 5$. (b) szakasz: 216 SRLG átlagosan 2.79 linkkel, $\rho_0 = 5$.

6. ábra. A $k = 0$ eset SRLG-inek vizualizációja (a) töröttvonal alakú linkek esetén, és (b) a töréspontokat 2 fokú csúcsként, és a linkeket szakaszokként kezelve. Az egyszerű megjelenítés érdekében minden SRLG-hez a lehető legkisebb korongot rajzoltuk ki, mely az éleit metszi, mégha ez a korong tartalmaz is gráfcúcsokat.

2.3. Tézis. [J1] Valódi hálózati topológiák esetén, amelyek éleit végpontjaik közötti töröttvonalaknak, illetve szakaszoknak tekintetem, a legfeljebb k csomópontot tartalmazó korong által élenként metszhető maximális linkhalmazok M_k listája $k = 0$ és $k = 1$ esetén rendre $\approx 1,2 \cdot |V|$ és $\approx 2,2 \cdot |V|$ elemű. Ezenfelül $|M_k|$ szublineárisan növekszik k függvényében. Az egy darab k csomópontot tartalmazó korong által metszett linkek maximális számát jelző ρ_k paraméter $k = 0$ és $k = 1$ esetén minden hálózat esetében ≤ 10 , és $k = 5$ esetén csak < 25 -re nőtt. Arra a következtetésre jutottam, hogy az M_k lista mérete a gyakorlati k értékek esetében kezelhetően kicsi.

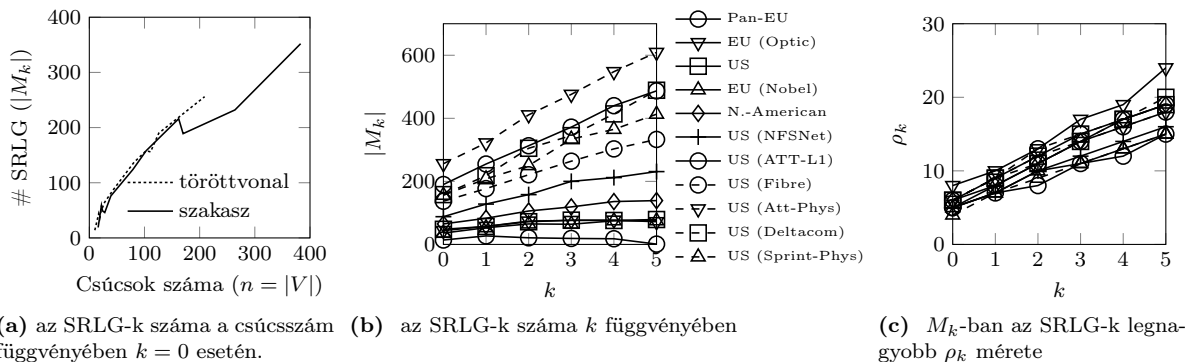
A szimulációkban a bemeneti topológiák kétféleképp vannak értelmezve: 1) *töröttvonal*, ahol linket töröttvonalak, és 2) *szakasz*, ahol a töréspontjai a töröttvonalaknak 2 fokú csúcsokkal vannak helyettesítve; itt a linkek alakjai egyenes szakaszok.

Hogy jobb képet kapjunk az M_k -ban felsorolt SRLG-kről, a 6. ábra az amerikai ATT-L1 hálózat két értelmezésének példáját mutatja be, amely 126 csomóponttal és 208 linkkel rendelkezik a töröttvonalaként kezelt linkek esetén, és 162 csomóponttal és 244 linkkel, miután átalakítottuk egyenesszakaszokból álló hálózattá. A 126 csomópontos amerikai (ATT-L1) hálózat esetén $|M_k| = 190$, ami kevesebb, mintha minden egyes csúcs és link SRLG-ként fel lenne sorolva. A 6. ábra mutatja ezeket az SRLG-eket, intuitív módon mindegyik egy közepes méretű regionális hibának felel meg. Az SRLG-k megfelelnek az intuíciónknak, miszerint a zsúfolt területeken több hálózati csomópont van, és így több SRLG reprezentálja őket, míg a kevésbé zsúfolt régiókban nagyobb területeknek megfelelő SRLG-k keletkeznek.

A gyakorlatban fontos, hogy az SRLG-k kicsik legyenek, mert méretük erősen befolyásolja útválasztási algoritmusok teljesítményét. Az 6. ábrán az SRLG-k viszonylag kicsik, minden SRLG átlagosan valamivel kevesebb, mint 3 linket tartalmaz.

Name	$ V $		$ E $		# SRLG $k = 0$		# SRLG $k = 1$	
	Polygon	Line	Polygon	Line	Polygon	Line	Polygon	Line
Pan-EU	10	16	16	22	14	19	27	35
EU (Optic)	17	22	40	45	44	59	57	71
EU (Nobel)	19	28	32	41	36	46	53	81
US [2]	21	24	39	42	48	49	57	64
N.-American	28	39	50	61	65	76	83	97
US (NFSNet)	44	79	73	108	88	124	128	172
US (Fibre)	81	170	141	230	137	189	177	249
US (Deltacom)	103	103	302	302	158	158	218	218
US (Sprint-Phys)	111	264	160	313	156	232	208	307
US (ATT-L1)	126	162	208	244	190	216	255	285
US (Att-Phys)	209	383	314	488	256	352	322	457

1. táblázat. Szimulációs eredmények a [22]-beli fizikai gerinchálózatokon.



7. ábra. A bemeneti topológiák kétféle értelmezésének összehasonlítása: A linkek töröttvonalak, vagy ezek sarokpontjai 2 fokú csúcscsámokként vannak kezelve, és a linkek egyenes szakaszokra vannak osztva.

Az 1. táblázat alapján az SRLG-k száma $k = 0$ esetén nagyjából $\approx 1.2 \cdot |V|$, $k = 1$ esetén pedig $\approx 2.2 \cdot |V|$. A 7a. ábra M_k számosságának $|V|$ -ben lineáris növekedését mutatja. A 7b. ábra az SRLG-k számának növekedését mutatja az egyes hálózatok esetében egymástól függetlenül, ugyanarra a k tartományra. Itt az $|M_k|$ enyhén szublineáris növekedését tapasztalhatjuk k függvényében. A 7c. ábra azt mutatja, hogy az élek ρ_k sűrűsége lineárisan nő k értékével. A $\rho_{k=0}$ és $\rho_{k=1}$ paraméterek értéke egyetlen vizsgált hálózat esetén sem lépte át a 10-et, és a $\rho_{k=5}$ is 25 alatt volt. Esetünkben a $\rho_{k=0}$ a hálózati topológiától függően 4 és 8 között mozgott.

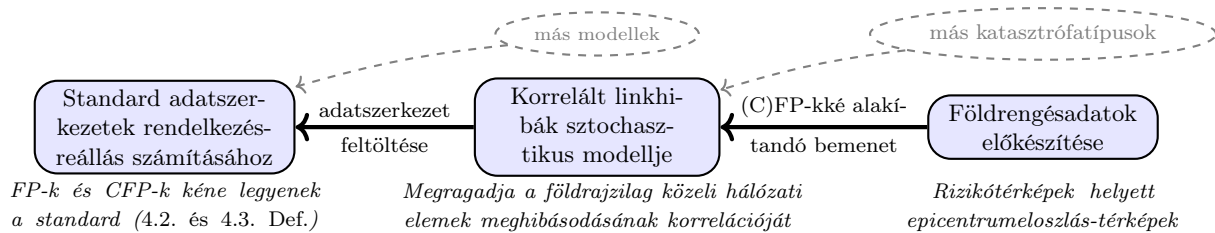
Megállapítható, hogy az M_k mérete a gyakorlati k értékek ($k \lesssim 5$) esetén kezelhetően kicsi.

4.3. A probabilisztikus SRLG-k terminológiájának egységesítése, és egy sztochasztikus modell a katasztrófák okozta korrelált linkhibák felsorolására

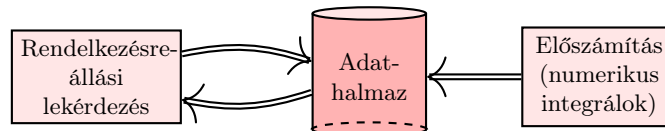
A katasztrófa bekövetkezésének valószínűsége nem azonos a sík minden pontján. Például a földrengések nagyobb valószínűséggel következnek be a törési zónákban, mint más helyeken, és az alacsonyabban fekvő régiókban nagyobb a valószínűsége az árvizeknek. Ezért fontos egy esemény bekövetkezésének valószínűsége. A 3. tézis ezt a kérdést úgy kezeli, hogy szabványos terminológiát, adatstruktúrákat és algoritmusokat javasol a probabilisztikus SRLG-k (PSRLG-k) terén.

3. Tézis. [C4, C9, J3] *Definiáltam a katasztrófák okozta linkmeghibásodások egy olyan sztochasztikus modelljét, amely figyelembe veszi a földrajzilag egymáshoz közel eső linkek meghibásodásai közötti korrelációt. A probabilisztikus SRLG-kkel kapcsolatos fogalmak és terminológia egységesítése érdekében szabványos adatstruktúrákat javasoltam a katasztrófaveszély valószínűségeinek tárolására. A korong alakú katasztrófák esetében ezen adatszerkezetek méretére és lekérdezési idejére elméleti felső korlátokat adtam. A modell és az adatszerkezetek kiértékelésével kimutattam, hogy valós szeizmikus adatok bemenete esetén ezek az adatszerkezetek kezelhető méretűek.*

A 8. ábra vizualizálja a 3. tézist. Nevezetesen, a legmagasabb szinten szabványos adatstruktúrákat javaslok a linkhalmazok hibavalószínűségeinek tárolására. Ezek az adatszerkezetek univerzálisak, és így függetlenek a feltöltésükhöz használt modelltől. A második szinten ajánlottam a katasztrófák okozta linkkiesések egy sztochasztikus modelljét, amely a korábbi modellekhez képest pontosabban ragadja meg a katasztrófák okozta linkkiesések közötti korrelációt. Ez a modell általános, mivel bármilyen katasztrófaeseményt képes bemenetként kezelni. A harmadik szinten a modellt valós szeizmikus adatok felhasználásával értékeltem. Így a 3. tézisben összefoglalt eredmények azt mutatják, hogy a nyers katasztrófaadatok a hálózati topológia földrajzi beágyazása ismeretében hogyan fordíthatók PSRLG-kre,



8. ábra. Components of Thesis 3: 1) standard data structures (CFPs and FPs) for storing joint failure probabilities of link sets, 2) a tractable stochastic model of link failures caused by disasters, and finally 3) evaluating using seismic data represented more precisely than the usual.



9. ábra. Keretrendszer szolgáltatások rendelkezésreállításának kiszámítására

azaz egyszerű linkhalmazokra egy hozzájuk rendelt valószínűséggel. A PSRLG-k ezután a szolgáltatások rendelkezésreállása számítása, sztochasztikus optimalizálási problémák, stb. bemeneteiként használhatók.

A 3. tézist három altézisre bontottam a következők szerint.

3.1. Tézis. [C4, C9, J3] A földrengések viselkedéséből kiindulva definiáltam a katasztrófák okozta link-meghibásodások egy sztochasztikus modelljét. Ez a modell az első, amely kifejezetten figyelembe veszi az ugyanazon katasztrófa által érintett linkek meghibásodásai közötti korrelációt.

A közös kockázatú linkcsoportok (SRLG-k) valószínűségi kiterjesztéseihez kapcsolódó fogalmak és terminológia egységesítése érdekében két szabványos adatszerkezetet javasoltam a katasztrófaveszély valószínűségeinek tárolására: egy S linkhalmaz esetén $FP(S)$ és $CFP(S)$ rendre annak a valószínűségét jelöli, hogy pontosan, illetve legalább S hibásodik meg.

Standard PSRLG terminológia Koncentráljunk egy pillanatra a szeizmikus veszélyre mint példára. A földrengések által jelentett veszélyt egy *epicentrum-eloszlási térkép* formájában adhatják meg, amely minden egyes $p \in \mathbb{R}^2$ helyhez megadja annak a valószínűségét, hogy katasztrófa történt p epicentrummal. Továbbá a katasztrófa mérete (vagy sugara) is lehet véletlen változó (pl. a nagyobb erősségű földrengések kisebb valószínűséggel következnek be, mint a kisebb erősségűek, még akkor is, ha epicentrumaik azonosak). Ezért szokás a katasztrófák $D \subseteq \mathbb{R}^2$ (végtelen méretű) \mathcal{D} halmazát tekinteni, és ehhez a halmazhoz egy valószínűségi mértéket rendelni. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy \mathcal{D} véges, és legyen $p_D = \Pr[D \in \mathcal{D} \text{ katasztrófa bekövetkezik}]^7$. Megjegyezzük, hogy egy SRLG S egynél több katasztrófát is reprezentálhat \mathcal{D} -ban; ezek halmazát a következőként jelöljük: $\text{support}(S) = \{D \in \mathcal{D} | S = \text{SRLG}(D)\}$.

A szakirodalomban a PSRLG-knek számos nem egyenértékű definíciója létezik⁸, ezért egységes terminológiára van szükség. A 4.2 és 4.3 definíciók szabványos PSRLG fogalmakat javasolnak. Egy FP (4.2. definíció) azt a valószínűséget jelöli, hogy *pontosan* S hibásodik meg, míg egy CFP (4.3. definíció) azt a valószínűséget mondja meg, hogy *legalább* S összes eleme meg fog hibásodni (és esetleg más linkek is):

4.2. Definíció (FP). Adott $D \subseteq \mathbb{R}^2$ katasztrófák egy \mathcal{D} halmaza esetén, ahol $D \in \mathcal{D}$ bekövetkezési valószínűségét p_D jelöli, egy adott $S \subseteq E$ linkhalmaz-meghibásodási valószínűsége (Link Failure State Probability) $FP(S) = \sum_{D \in \text{support}(S)} p_D$. Hangsúlyozom, hogy ha egy $\text{support}(S)$ -beli katasztrófa bekövetkezik, akkor pontosan S linkjei hibásodnak meg (1 valószínűséggel).

⁷Végtelen halmazok esetén használhatunk diszkrétizációt, ekkor egy kis pontatlanság árán csak véges számú halmazt vehetünk figyelembe.

⁸pl. a probabilisztikus kiterjesztésű SRLG-eket vizsgáló első dolgozatban (amely [23] volt), minden SRLG esemény $r \in R$ -ben π_r valószínűséggel következik be, és ha egy r SRLG esemény bekövetkezik, a (i, j) kapcsolat a többi kapcsolattól függetlenül $p_{i,j}^r$ valószínűséggel fog meghibásodni. Így a [23]-PSRLG-eket "kétlépcsős PSRLG-knek" is nevezhetnénk

4.3. Definíció (CFP). Adott $D \subseteq \mathbb{R}^2$ katasztrófák egy \mathcal{D} halmaza esetén, ahol $D \in \mathcal{D}$ bekövetkezési valószínűségét p_D jelöli, egy adott $S \subseteq E$ kumulatív meghibásodási valószínűsége (Cumulative Failure Probability) $CFP(S) = \sum_{T \supseteq S} \sum_{D \in \text{support}(T)} p_D$. Hangsúlyozom, hogy ha egy $\bigcup_{T \supseteq S} \text{support}(T)$ -beli katasztrófa bekövetkezik, akkor S linkjei meghibásodnak (1 valószínűséggel).

Néha "CFP" néven fogok hivatkozni 1) az $(S, CFP(S))$ halmazra egy S linkhalmaz esetében, vagy egyszerűen 2) a $CFP(S)$ -re. Egy G gráf esetén a szigorúan pozitív valószínűségű CFP-k gyűjteményét $CFP[G]$ -vel jelöljük. Ugyanez vonatkozik a szigorúan pozitív FP-kre is. Megjegyezzük, hogy azért nem hivatkozok egy S és $CFP(S)$ vagy $FP(S)$ linkhalmazból álló párra egyszerűen PSRLG-ként, mert a téziszfűzetben végig különbséget kell tenni e két adatszerkezet között.

Katasztrófák okozta korrelált linkmeghibásodások sztochasztikus modellje Először is, a katasztrófa okozta regionális meghibásodásokra vonatkozó modellem a következőket feltételezi:

1. Feltevés. A vizsgált időszakban legfeljebb egy katasztrófa következik be.⁹

A modell a következő paraméterekkel rendelkezik, véletlenszerűen kiválasztott értékekkel: p **epicentrum**, amely az \mathbb{R}^2 sík egy pontja, s **alak (és méret)**, amely egy $[0, 1]$ -beli szám. Az \mathbb{R}^2 minden p pontjához hozzárendelünk egy $h(p)$ **rizikóértéket**, amely annak a valószínűségét jelöli, hogy p a következő katasztrófa epicentrumává válik (lásd 10a. ábra). Pontosabban, $h(p)$ egy sűrűségfüggvény \mathbb{R}^2 -en, így:

$$\int_{p \in \mathbb{R}^2} h(p) dp = 1 . \quad (1)$$

A vizsgált típusú regionális katasztrófa (pl. elektromágnesesimpulzus-támadás, természeti katasztrófák, például napkitörések, földrengések, hurrikánok és árvizek) után a fizikai infrastruktúra (például optikai szálak, erősítők, routerek és switchek) egy adott területen megsemmisül. E terület lehetséges alakjait egy olyan $r(p, s)$ halmaz határozza meg, amely a sík egy zárt régióját jelöli (a megsemmisült terület tényleges alakja) a p epicentrum és a s alak/méret paraméter függvényében. Ez egy általános katasztrófamodell, ahol több lehetséges kárterület is meghatározható $r(p, s)$ által (lásd 10b. ábra).

2. Feltevés. Egy p epicentrumú és s méretű regionális katasztrófa a G hálózat pontosan azon linkjeinek meghibásodását okozza, melyekbe $r(p, s)$ belemetsz.

A modell felteszi, hogy $r(p, s)$ monoton növekszik s -ben (10b. ábra)¹⁰, precízebben, azt tesszük fel, hogy

3. Feltevés.

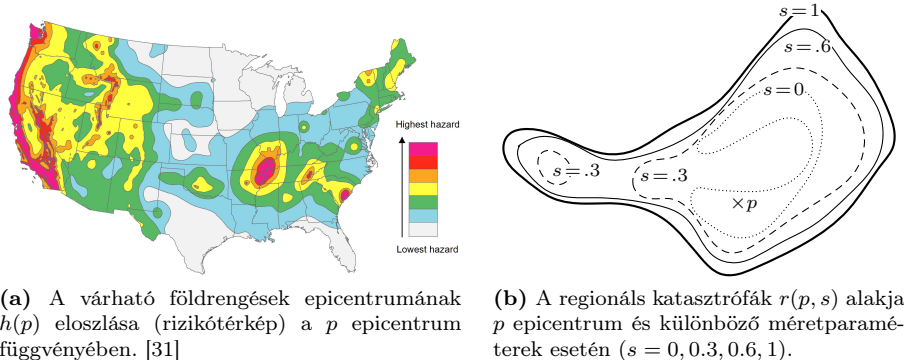
$$r(p, s) \subseteq r(p, s') \text{ if } s < s' \quad \forall p \in \mathbb{R}^2, 0 \leq s, s' \leq 1 , \quad (2)$$

ahol $r(p, s)$ adott p esetén a sérült területek egyenletes mintavételezésének eredménye. Adott p esetén ugyanis annak valószínűsége, hogy a hiba mérete kisebb, mint s , pontosan s . Így az s -et *relatív méretnek* nevezzük a téziszfűzet további részében.

Fontos megjegyezni, hogy a katasztrófa epicentruma és a relatív mérete ismeretében a támadás kimenetele determinisztikus. Más szóval, bármely e link, melybe $r(p, s)$ belemetsz, 1 valószínűséggel meghibásodik, ha egy p és s paraméterű esemény bekövetkezik. Jelöljük a meghibásodott linkek halmazát $R(p, s)$ -sel. A 2. feltételezés azt jelenti, hogy egy adott p pont esetén $R(p, s) \subseteq R(p, s')$, ha $s \leq s'$. Jelölje $s(p, e)$ a megfelelő legkisebb s méretet, amelynél a p ponton bekövetkező katasztrófa metszheti az

⁹Az az eset, amikor több katasztrófa várhatóan egyszerre következik be, egy új, vegyes katasztrófátípus meghatározásával kezelhető, lásd [24].

¹⁰Változatos katasztrófaterület-formát tanulmányoztak már [10, 16, 15, 25, 5, 7, 2, 6, 8, 9, 11, 26, 27, 28, 29, 30, C10], főként korong vagy szakasz alakot, de néhány tanulmány tetszőleges katasztrófaalakot feltételez [15, 25]. Mindezen modellek megfelelnek a 3. feltevésnek.



(a) A várható földrengések epicentrumának $h(p)$ eloszlása (rizikótérkép) a p epicentrum függvényében. [31]

(b) A regionális katasztrófák $r(p, s)$ alakja p epicentrum és különböző méretparaméterek esetén ($s = 0, 0.3, 0.6, 1$).

10. ábra. Valós bemeneti példák.

e kapcsolatot. Továbbá, ρ -val jelöljük a maximális számú linket, amelyeket egyetlen (maximálisan $s = 1$ méretű) hiba érinthet:

$$\rho = \max_{p \in \mathbb{R}^2} R(p, 1) . \quad (3)$$

Legyen $f(e, p)$ annak **valószínűsége**, hogy az e link meghibásodik, egy p epicentrumú katasztrófa esetén. Megjegyezzük, hogy $f(e, p) > 0$ akkor fordulhat elő, ha $e \in R(p, 1)$. $f(e, p)$ kiszámítható $R(p, s)$ -ből, ahol s a $[0, 1]$ tartományban van. Így,

$$f(e, p) = \int_{s=0}^1 I_{R(p,s)}(e) ds , \quad (4)$$

ahol az $I_{R(p,s)}(e)$ indikátor változó azt mutatja meg, hogy $e \in R(p, s)$ fennáll-e.

Most kibővítjük a jelölésünket a következő katasztrófában az e link kiesésének valószínűségével:

$$P(e) := \int_{p \in \mathbb{R}^2} h(p) f(e, p) dp . \quad (5)$$

Annak a valószínűségét, hogy a kapcsolatok egy $S \subseteq E$ halmaza egyidejűleg meghibásodik, feltéve, hogy a katasztrófa epicentruma $p \in \mathbb{R}^2$ -ben van, a következőként jelöljük:

$$f(S, p) := \int_{s=0}^1 \prod_{e \in S} I_{R(p,s)}(e) ds . \quad (6)$$

Egy $S = (e_1, e_2, \dots, e_{|S|}) \subseteq R(p, 1)$ linksorozatot véve, ahol $s(p, e_1) \leq s(p, e_2) \leq \dots \leq s(p, e_{|S|})$, az együttes meghibásodás valószínűsége $\prod_{e \in S} I_{R(p,s)}(e) = 1$ pontosan ha $s \geq s(p, e_{|S|})$, máskülönben 0. Ebből adódik, hogy:

$$f(S, p) = f(e_{|S|}, p) = \min_{e \in S} f(e, p) . \quad (7)$$

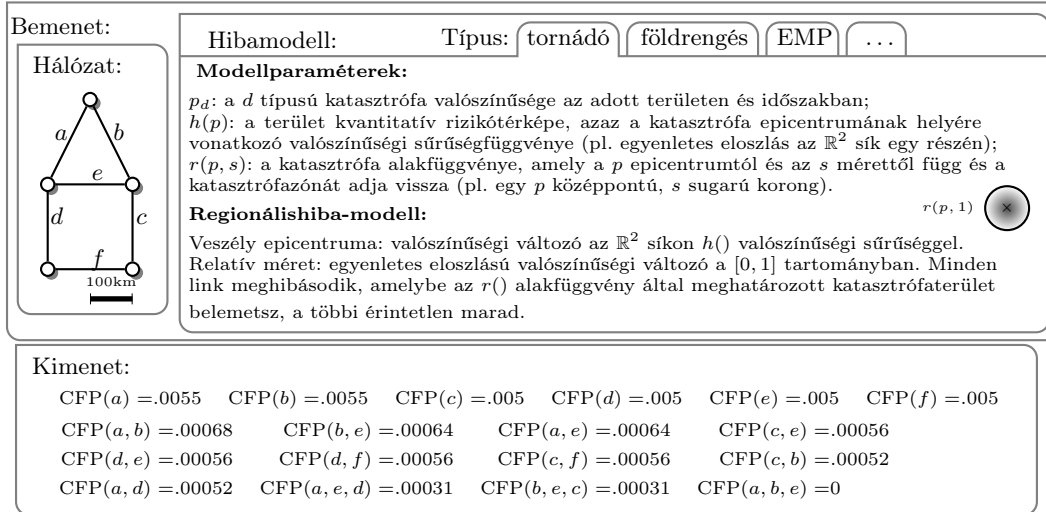
Végül, a fenti eredményeket használva a következőként számíthatjuk ki a CFP(S) értékét¹¹:

$$\text{CFP}(S) = \int_{p \in \mathbb{R}^2} h(p) f(S, p) dp = \int_{p \in \mathbb{R}^2} h(p) \min_{e \in S} f(e, p) dp . \quad (8)$$

A 11. ábrán például a képlet 5 csomópontos hálózatra történő alkalmazásának eredményei láthatók az összes nemnulla együttes linkmeghibásodási valószínűségekre. Ebben a példában az $r(p, s)$ mindig egy $s \cdot 50$ km sugarú korong. A hálózat méretéhez képest exponenciálisan sok közös meghibásodási esemény lehetséges; azonban az egymástól távol eső linkek közös meghibásodásának valószínűsége korlátos méretű katasztrófa esetén nulla. Ez érvényes például az f és e kapcsolatokra, amelyek távolsága 200 km.

Más munkák (pl. [15, a 8. Lemma bizonyításában]) egy S halmaz közös meghibásodási valószínűsége-

¹¹FP(S) hasonló megfigyelések alapján ugyancsak egyszerűen számolható.



11. ábra. A probléma be- és kimenetének illusztrációja.

gét úgy fejezték ki, hogy a S halmazban lévő linkek meghibásodási valószínűségeit összeszorozták, így implicit módon feltételezve, hogy ezek a meghibásodások függetlenek. A [15]-től eltérően az én modellem a katasztrófa determinisztikus kimenetelét feltételezi (miután az epicentrum és az alakja meg van határozva). Ez azt jelenti, hogy az én modellemben a meghibásodások függenek egymástól. Például két vezeték ugyanazon a helyen (pl. ugyanazon a vezetéken belül) mindig együtt hibásodik meg (pl. amikor a vezetéket elvágják).

3.2. Tézis. [C4, C9, J3] Egy adott L_p metrikában korong alakú katasztrófák esetén, a $G(V, E)$ hálózati topológiát az euklideszi síkban ábrázolva, a linkeket legfeljebb γ szakaszból álló töröttvonalaknak tekintve, a linkek kereszteződéseinek számát x -szel, egy katasztrófa által érintett linkek maximális számát pedig ρ -val jelölve, a következőket bizonyítottam. Azon $S \subseteq E$ linkhalmazok száma, melyekre $FP(S)$ szigorúan pozitív, $O((|V| + x)\rho^2\gamma^4)$. Azon $S \subseteq E$ linkhalmazok számának, melyekre $CFP(S) > 0$, alsó és felső korlátai rendre $\Omega(2^\rho)$, és $O(2^\rho(|V| + x)\rho^2\gamma^4)$. Az összes pozitív CFP-t kiegyensúlyozott bináris fában tárolva egy adott linkhalmaz CFP-jének lekérdezési ideje $O(\rho \log((|V| + x)\rho\gamma))$. Az összes pozitív FP-t egy listában tárolva egy adott linkhalmaz CFP-jének lekérdezési ideje $O((|V| + x)\rho^2\gamma^4)$.

Adathalmaz neve	Tárkomplexitás	Lekérdezési idő
CFP	$\Omega(2^\rho)$ és $O(2^\rho(n + x)\rho^2\gamma^4)$	hashing: <i>konstans</i> nagy valószínűséggel kiegyensúlyozott bináris fa: $O(\rho \log((n + x)\rho\gamma))$ legrosszabb eset
FP	$O((n + x)\rho^2\gamma^4)$	$O((n + x)\rho^2\gamma^4)$

2. táblázat. Szolgáltatások elérhetősége: Kompromisszum a tárkomplexitás és a lekérdezési idő között

Az FP[G] és CFP[G] struktúrák számossága: A korábban bemutatott hibamodell esetében, ahol a hibák korongok egy adott L_p normában, az FP-k száma korlátozható a vonalszakaszok magasabb rendű Voronoi-diagramjaira vonatkozó kombinatorikus geometriai eredményekre támaszkodva¹².

Állítás: Egy adott L_p metrikában korong alakú katasztrófák halmaza esetén (azaz $r(p, s)$ kör alakú), ha a hálózat élei általános helyzetben vannak, $O((n + x)\rho^2\gamma^4)$ pozitív valószínűségű FP létezik.

A fenti tétel bizonyításának felvázolásához egy pillanatra koncentráljunk a vonalszakasz alakú linkekre. Tudjuk, hogy a linkek m száma $O(n + x)$ a szakasznak tekintett linkek esetében. A [32, Thm.

¹²A vonalszakaszok k rendű Voronoi-diagramját olyan pontosztályokként definiáljuk, amelyekhez a legközelebbi k link azonos. Ezek az osztályok régiókat alkotnak, a magasabb rendű Voronoi-diagramok partícionálják a teret.

Megjegyezzük, hogy L_p norma esetén $p = 2$ esetén a szokásos euklideszi köröket kapjuk vissza, $p = 1$ vagy $p = \infty$ esetén párhuzamos oldalú négyzetek családját, $p = 2/3$ esetén pedig asztroidokat, azaz sajátos 4 sarokpontú csillagokat.

6]-ből tudjuk, hogy a szakasz- k -Voronoi cellák száma L_p normában $O(k(m-k) + x)$, vagy másképpen $O(k(n+x-k) + x)$, így a k linket eltaláló katasztrófák legfeljebb ennyi linkhalmazt találhatnak el. Mivel egy korong legfeljebb ρ linket metszhet, ez $O(\rho^2(n+x))$. Ha a linkek legfeljebb γ vonalszakaszokból álló töröttvonalak lehetnek, az érvelés lényegében megismételhető, az egyetlen különbség az, hogy a γ^4 tényező megjelenik a becslésben.

Ugyanebben a környezetben a CFP-k száma nagyon nagy lehet:

Állítás: A nem nulla valószínűségű CFP-k száma $\Omega(2^\rho)$ által alulról korlátozott. Adott L_p metrikában korong alakú katasztrófák halmaza esetén, ha a hálózat élei általános helyzetben vannak, a nem nulla valószínűségű CFP-k száma $O(2^\rho(n+x)\rho^2\gamma^4)$.

Az állítás az előzőhöz hasonlóan bizonyítható. Minden FP és CFP tárolható $O(\rho)$ térben, mivel az legfeljebb ρ linkből álló linkhalmazt tartalmaz, a hozzá tartozó valószínűség mellett. Ily módon a $\text{FP}[G]$ és $\text{CFP}[G]$ tárigrénye $O((n+x)\rho^3\gamma^4)$ és $O(2^\rho(n+x)\rho^3\gamma^4)$.

Az $\text{FP}[G]$ és $\text{CFP}[G]$ struktúrák lekérdezési ideje: Megmutatható, hogy a modellemben bármely adott $S \subseteq E$ linkhalmaz esetén $\text{CFP}(S) = \sum_{T \supseteq S} \text{FP}(T)$. Ennek alapján FP lista és S linkhalmaz esetén ahhoz, hogy $\text{CFP}(S)$ -t kiszámoljuk, végig kell menni a listán, és össze kell adni a $\text{FP}(T)$ értékeket minden $T \supseteq S$ -re. Az előző tételek szerint ez $O((n+x)\rho^2\gamma^2)$ alatt elvégezhető.

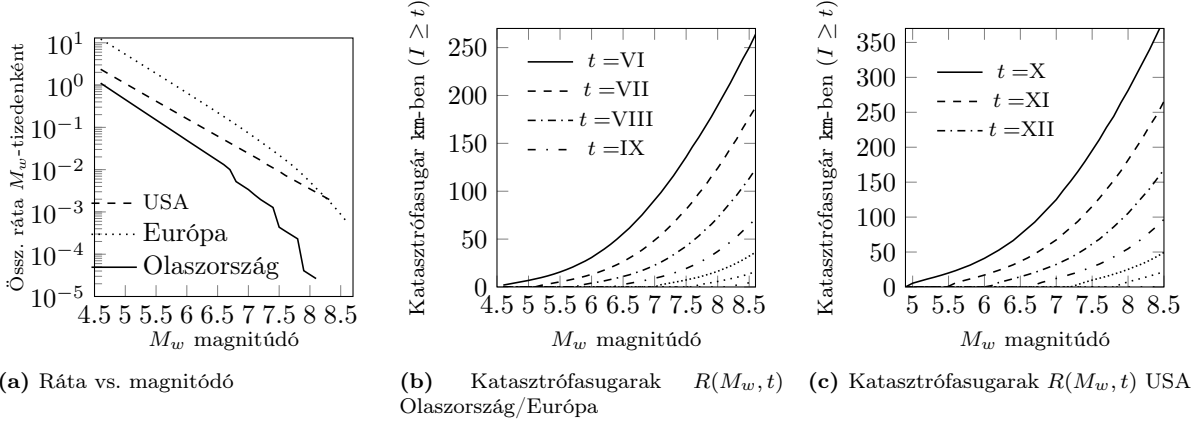
Ha a CFP struktúrát listaként tároljuk, akkor a $\text{CFP}(S)$ lekérdezési ideje $\Omega(\rho)$. Megjegyzem, hogy ha S nincs tárolva a CFP struktúrában, akkor $\text{CFP}(S) = 0$. A halmazok lekérdezési ideje nagyon nagy valószínűséggel (a hashing segítségével) konstansra csökkenthető. Egy kiegyensúlyozott bináris fa használatával a legrosszabb esetben a lekérdezési idő $O(\rho \log((n+x)\rho\gamma))$, a korábbi tételek szerint, ami még mindig nagyon jónak mondható. A CFP struktúra hátránya, hogy $\Omega(2^\rho)$ tárkomplexitással rendelkezik, ami nagyobb hálózati sűrűség esetén nagyon gazdaságtalanná teszi.

A szeizmikus veszélyen alapuló szimulációkat bemutató 3.3. tézis előtt néhány szót szentelek a földrengés által keltett rengés intenzitásának mérésére szolgáló szabványos skálának, a Mercalli-Cancani-Sieberg (MCS) skálának [33]. A skála I-től XII-ig terjed: az $I \leq V$ intenzitás nem okoz szerkezeti károkat, $I = \text{IX}$ -nél a talajfolyósodás kezdődik, és végül $I = \text{XII}$ teljes pusztítást jelent.

3.3. Tézis. [C4, C9, J3] *Valós szeizmikus adatok körültekintő felhasználásával, olasz, európai és az Egyesült Államokban található, összefüggő hálózati topológiákra a következőket találtam. Feltételezve, hogy a hálózati berendezések csak az MCS-skála szerinti VIII. erősségű rengés esetén hibásodnak meg, nincs jelentős különbség a pozitív valószínűségű CFP-k és FP-k száma között. A pozitív CFP-k halmaza csak erős földrengések ($M_w \geq 8$), rövid hálózati kapcsolatok ($\leq \sim 50$ km) és a földrengéssel szemben gyengén ellenálló (VI. intenzitásnál meghibásodó) hálózati erőforrások együttes jelenléte esetén válik elfogadhatatlanul számossá és lassan számíthatóvá. Az FP struktúra alacsony kardinalitású, és ilyen körülmények között is néhány perc alatt kiszámítható, akár egy átlagos laptopon is. Végül, a legfeljebb l linkekkel rendelkező CFP-k listázása ritkán eredményez olyan listát, amely azonos az első néhány legvalószínűbb CFP megtartásával.*

E tézisben numerikus eredményeket mutatok be, amelyek validálják a modellemben, és demonstrálják a javasolt algoritmusok használatát néhány valós gerinchálózaton [34, C4], valós szeizmikus veszélyforrásokkal együtt. Az algoritmusokat Python 3.6. nyelven, annak különböző könyvtárait használva valósítottam meg, a 3.3. tézisben bemutatott regionális hibamodellt diszkretizálva.

A szeizmikus rizikó reprezentálása Az értékelés során a következő földrengés által okozott meghibásodásokat vizsgáljuk egy adott földrajzi területen belül, ezért feltételezzük, hogy a vizsgált időszakban pontosan egy földrengés történik. A földrengést az epicentrumával és momentummagnitúdójával azonosítjuk [35]: $c_{i,j}$ **epicentrum**, amely egy szélességi és hosszúsági cellát jelent a Föld felszínén, amelyet a háló-



12. ábra. Szeizmikus bemeneti adatok

zat területére helyezett cellarácsból veszünk ki, és M_w **magnitúdó**, ahol $M_w \in \{4.6, 4.7, \dots, 8.6\} =: \mathcal{M}$. A cellarácsot úgy indexeljük, hogy $i \in \{1, \dots, i_{max}\} =: \mathcal{I}_i, j \in \{1, \dots, j_{max}\} =: \mathcal{I}_j$.

Jelölje E_{i,j,M_w} azon földrengések halmazát, amelyek középpontja a $c_{i,j}$ cellában van, és nagysága a $(M_w - 0.1, M_w]$ tartományba esik. Mivel a cellákat és a magnitúdóintervallumokat elég kicsinek tekintjük ahhoz, hogy az egyes földrengések által okozott károk a E_{i,j,M_w} -ban legtöbbször azonosak legyenek¹³, az összes E_{i,j,M_w} földrengést egyetlen földrengéssel fogjuk ábrázolni, amelynek középpontja a $c_{i,j}$ közepén van, és amelynek erőssége M_w . Legyen annak a valószínűsége, hogy a következő földrengés E_{i,j,M_w} -ben van, p_{i,j,M_w} . Vegyük észre, hogy ezek a valószínűségek összeadódnak 1-re.

A kezdeti bemenet a földrengéstípusok aktivitási rátái r_{i,j,M_w} (lásd 12a. ábra) helyett a p_{i,j,M_w} értékek, így ezeket a rátákat valószínűségekre kell lefordítanunk. Azt állítjuk, hogy azzal a feltételezéssel, hogy az egyes földrengésfajták E_{i,j,M_w} független Poisson-érkezési folyamatok szerint érkeznek¹⁴, a r_{i,j,M_w} paraméterekkel a földrengések E_{i,j,M_w} rátáit könnyű lefordítani a következő földrengés bekövetkezésének p_{i,j,M_w} valószínűségére:

$$p_{i,j,M_w} = r_{i,j,M_w} / \sum_{i,j \in \mathcal{I}_i \times \mathcal{I}_j} \sum_{M_w \in \mathcal{M}} r_{i,j,M_w}. \quad (9)$$

Minden egyes e hálózati elemhez tartozik egy $t(e)$ **intenzitási küszöbérték**, ami azt jelöli, hogy ha a földmozgás intenzitása I eléri ezt a küszöbértéket ($I \geq t(e)$) az e fizikai beágyazásának bármely pontján, az elem meghibásodik. Szimulációinkban minden hálózati elemnek ugyanaz a küszöbértéke: $t(e) := t$, ahol $t \in \{VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII\} =: T$ a Mercalli-Cancani-Sieberg (MCS) skála szerint [33].

Minden egyes E_{i,j,M_w} földrengés után a fizikai infrastruktúra (például optikai szálak, erősítők, routerek és kapcsolók) egy $disk(c_{i,j}, R(M_w, t))$ korong alakú területen megsemmisül. A $disk(c_{i,j}, R(M_w, t))$ középpontja a $c_{i,j}$ középpontja, míg annak $R(M_w, t)$ sugara monoton növekszik az M_w nagyságával, és csökken az intenzitásküszöb t értékével (12b. ábra). Mivel a földrengések bárhol előfordulhatnak a cellán belül, a sugarat a cella középpontja és a külső sarkai közötti távolsággal növeljük. Így a korong mindig túlbecsüli a $c_{i,j}$ nagyságú cellában lévő M_w nagyságú földrengés által károsított területet.

Az aktivitási ráták és katasztrófasugarak kiszámítása nem képezi téziseim tárgyát.

Szimulációs eredmények Hét topológiát veszünk figyelembe: egy olasz topológiát, három másik európai topológiát és további három amerikai topológiát. Eltérő rendelkezés hiányában a $t5$ intenzitástűrési küszöbértéket az MCS-skála szerinti VI-ra állítjuk. Az összes topológia csúcs- és linkszámát, valamint a nemnulla valószínűségű CFP-k és FP-k számát a 3. táblázat tartalmazza $t = VI$ és $t = VII$ esetén.

A 13a. ábra részletesebb magyarázatot ad a CFP-k számáról a ρ (a földrengés által érintett linke

¹³A szimulációinkban használt rácsellák oldalai 0.05° hosszúak voltak az olasz sebességtérképen, és 0.1° az EU és az USA esetében, ami 4km és 10km közötti cellahosszúságot jelent.

¹⁴A földrengések időben és térben is csoportosulhatnak, eloszlásuk pedig a Poisson-törvényhez képest túlságosan szóró, a probléma (azaz az időben és térben való csoportosulás) kezelésének általános módja a földrengéskatalógus deklaszterezése,

Hálózat neve	n	m	CFP-k száma, $t = VI$	FP-k száma, $t = VI$	CFP-k száma, $t = VII$	FP-k száma, $t = VII$
Optic EU	22	45	6377	202	1369	135
Italian	25	34	12106	308	676	200
US	26	43	946	246	260	164
Nobel EU	28	41	3867	149	680	94
EU	37	57	5634	212	745	133
N.-American	39	61	2024	394	556	257
NFSNET	79	108	14199	969	1762	523

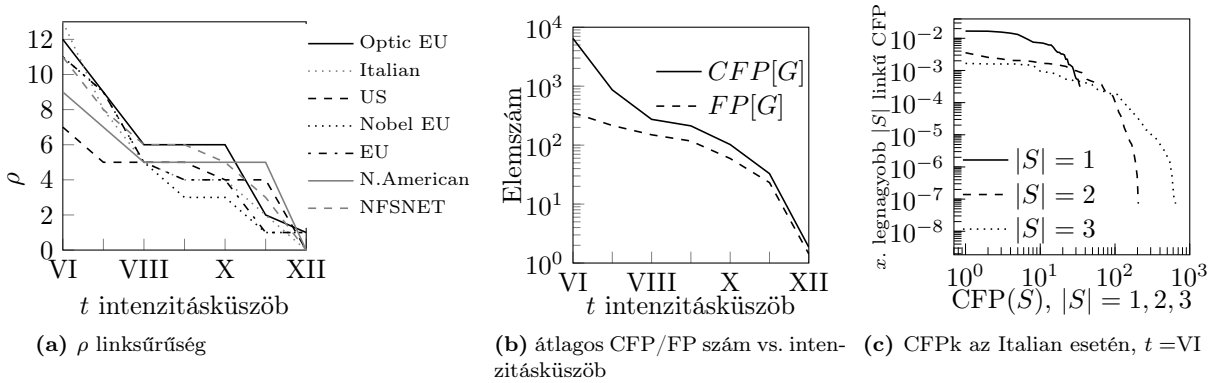
3. táblázat. A vizsgált hálózati topológiák

max. száma) értékein keresztül. A $t = VI$ értéken az Italian $\rho = 22$, a Nobel EU és az EU esetén $\rho = 15$, végül az American, a North-American és az NFSNET esetében a ρ értéke rendre 5, 5 és 6.

Érdekes módon, bár az amerikai hálózatnak valamivel több csomópontja és linkje van, mint az olasz hálózatnak, sokkal kevesebb a pozitív CFP-je (946 a 12106-hoz képest). Ez a különbség könnyen megmagyarázható, ha figyelembe vesszük, hogy a nem nulla CFP-k száma $\Omega(2^\rho)$ által alulról korlátozott. Mivel az olasz hálózat sokkal rövidebb linkekkel rendelkezik, mint az amerikai hálózatok, a meghibásodott linkhalmazok általában nagyobbak. Ugyanezt az exponenciális növekedést figyelhetjük meg a metszett linkek maximális számánál, amikor a küszöbértéket $t = VII$ -ről $t = VI$ -ra csökkentjük. Például az NFSNET CFP-inek száma 1762 $t = VII$ mellett, de 14199-ra robban, ha ezt a küszöbértéket $t = VI$ -ra csökkentjük. Ezzel szemben az FP-k száma sokkal kisebb ugrást tesz, 523-ról 969-re.

A 13b. ábrán a CFP[G] és FP[G] struktúrák tárigényét mutatjuk be t függvényében. A várakozásoknak megfelelően a CFP-k száma gyorsan csökken az intenzitási küszöbértékkel. Eredményeink azt mutatják, hogy különösen alacsonyabb küszöbértékeknél az FP struktúra választása jelentősen csökkentheti a helyigényt. Ez a jelenség még erősebb az Italy_995 esetében, amely egy 32 csomópontot és 70 linket tartalmazó hálózat Olaszország felett, és amelyet úgy döntöttünk, hogy a prezentált statisztikák többségéből kizárunk. Ennek oka a szokatlanul nagy sűrűség: a $t = VI$ és VII-re sűrűsége $\rho_{VI} = 31$ és $\rho_{VII} = 19$, ami rendre $> 10^9$ és 1153294 CFP-t eredményez, míg a FP-k száma csak 2011 és 1090.

Folytatjuk a meghíúsult linkhalmazok számosságának vizsgálatát, a 13c. ábra részletesen vizsgálja a CFP(S) és $|S|$ közötti függést $t = VI$, valamint $|S| = 1, 2$ és 3 esetén. Az olasz hálózatban 34 egyszeres linkmeghibásodás van, amelyek CFP-értéke $[0.0003, 0.019]$ között mozog; 205 kettős linkmeghibásodást kell számbavenni, $[7 \times 10^{-8}, 0.0037]$ közötti CFP-kkel, és 648 hármas linkmeghibásodás lehetséges, $[7 \times 10^{-8}, 0.0019]$ -beli értékekkel. Láthatjuk, hogy egyes l méretű CFP-k kisebb valószínűséggel fordulnak elő, mint egyes $l + 1$ linket tartalmazó CFP-k. Így a legfeljebb l linkeket tartalmazó CFP-k tárolása csak ritkán vezet ugyanahhoz az eredményhez, mintha csak a legvalószínűbb CFP-eket tárolnánk.



13. ábra. Szimulációs eredmények a PSRLG modellemhez

ahogy mi is tettük: a katalógus használata előtt egy deklaszterező szűrő segítségével eltávolítottuk a főrengésnek nem tekinthető eseményeket. [36].

5. Az eredmények alkalmazhatósága

A téziseimben bemutatott eredmények a legkorszerűbb algoritmusokat és modelleket mutatják be a regionális közös kockázatú linkcsoportok (regionális SRLG-k) és a regionális probabilisztikus SRLG-k (regionális PSRLG-k) felsorolásához, mely struktúrák kulcsfontosságúak a távközlési hálózatok regionális hibáktól való védelmének összetett geometriai problémájának tisztán kombinatorikus és probabilisztikus lényegi feladatainak megragadásában.

Az 1. és 2. tézis által kínált regionális SRLG-listák alapvető inputok a régiófüggetlen utakat számító algoritmusok létrehozásához. Mivel az útválasztási módszerek nincsenek tisztában a topológia geometriai beágyazásával, az egyidejűleg kudarcot valló linkek halmazainak listázása lehetővé teszi, hogy az útválasztás katasztrófa-diszjunktta váljon. Az 1. és 2. tézisben bemutatott M_r és M_k SRLG-listákat azon esetek lehető legjobb kezelésére terveztem, amikor az internetszolgáltató a hálózati topológia pontos geometriáját 1) ismeri, vagy 2) nem ismeri.

Az 1. és 2. tézisek eredményei szintén létfontosságúak a regionális hibákat detektáló ún. nyomonkövetési utak (monitoring trail, m-trail) meghatározásához. Ez egyszerűen azért van, mert anélkül, hogy ismernénk azokat a linkeket, amelyek vélhetően nagy eséllyel közösen meghibásodhatnak, feleslegesen sok költséges monitorozó utat kellene használni a regionális hibák felderítésére.

A PSRLG-khez kapcsolódó, a 3. tézisben bemutatott modell és adatstruktúrák (CFP[G] és FP[G]) lehetővé teszik a szolgáltatások elérhetőségének gyors kiszámítását, amelyek döntő fontosságúak ezeknek az elérhetőségeknek az optimalizálása szempontjából. Hatékonyságukat a szeizmikus veszélyekre vonatkozó adatok PSRLG-kké történő átalakításával bizonyítottam, ám más katasztrófatípusokhoz is felhasználhatók. Úgy gondolom, hogy a javasolt CFP[G] és FP[G] adatstruktúrákat a katasztrófaveszélyek standard tárolóiként kellene használni.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném kifejezni mély hálámat Tapolcai János témavezetőmnek az elmúlt évek alatti türelmes útmutatásaiért, lelkes bátorításáért és hasznos kritikáiért. Támogatása elengedhetetlen volt a kutatási módszertan megértéséhez és a kutatóvá váláshoz a távközlés terén.

Köszönettel tartozom azoknak, akik közreműködtek ebben a dolgozatban: Bérczi-Kovács Erika, Rónyai Lajos, David Hay, Alessandro Valentini és sokan mások. Ezúton is köszönetet mondok Stefan Schmidnek, David Haynak és Costin Raiciunak, hogy vendégkutatóként fogadtak engem 2019-ben.

Az itt bemutatott munkát a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem (BME) Nagysebességű Hálózatok Laboratóriumában végeztem. A CA15127 „Resilient Communication Services Protecting End-user Applications from Disaster-based Failures” (RECODIS) COST Action eszközei nagyban segítettek kutatásomat.

Hivatkozások

- [1] A. de Sousa and D. Santos, „The Minimum Cost D-Geodiverse Anycast Routing with Optimal Selection of Anycast Nodes,” in *2019 15th International Conference on the Design of Reliable Communication Networks (DRCN)*, pp. 21–28, March 2019.
- [2] F. Dikbiyik, M. Tornatore, and B. Mukherjee, „Minimizing the risk from disaster failures in optical backbone networks,” *J. Lightw. Technol.*, vol. 32, no. 18, pp. 3175–3183, 2014.
- [3] O. Gerstel, M. Jinno, A. Lord, and S. B. Yoo, „Elastic optical networking: A new dawn for the optical layer?,” *Communications Magazine, IEEE*, vol. 50, no. 2, pp. s12–s20, 2012.

- [4] T. Gomes, J. Tapolcai, C. Esposito, D. Hutchison, F. Kuipers, J. Rak, A. de Sousa, A. Iossifides, R. Travanca, J. André, L. Jorge, L. Martins, P. O. Ugalde, A. Pašić, D. Pezaros, S. Jouet, S. Secci, and M. Tornatore, „A survey of strategies for communication networks to protect against large-scale natural disasters,” in *8th International Workshop on Resilient Networks Design and Modeling (RNDM)*, pp. 11–22, Sept 2016.
- [5] M. F. Habib, M. Tornatore, M. De Leenheer, F. Dikbiyik, and B. Mukherjee, „Design of disaster-resilient optical datacenter networks,” *J. Lightw. Technol.*, vol. 30, no. 16, pp. 2563–2573, 2012.
- [6] I. B. B. Harter, D. Schupke, M. Hoffmann, G. Carle, *et al.*, „Network virtualization for disaster resilience of cloud services,” *IEEE Commun. Mag.*, vol. 52, no. 12, pp. 88–95, 2014.
- [7] J. Heidemann, L. Quan, and Y. Pradkin, *A preliminary analysis of network outages during hurricane Sandy*. University of Southern California, Information Sciences Institute, 2012.
- [8] X. Long, D. Tipper, and T. Gomes, „Measuring the survivability of networks to geographic correlated failures,” *Optical Switching and Networking*, vol. 14, pp. 117–133, 2014.
- [9] B. Mukherjee, M. Habib, and F. Dikbiyik, „Network adaptability from disaster disruptions and cascading failures,” *IEEE Commun. Mag.*, vol. 52, no. 5, pp. 230–238, 2014.
- [10] S. Neumayer, G. Zussman, R. Cohen, and E. Modiano, „Assessing the vulnerability of the fiber infrastructure to disasters,” *IEEE/ACM Trans. Netw.*, vol. 19, no. 6, pp. 1610–1623, 2011.
- [11] R. Souza Couto, S. Secci, M. Mitre Campista, K. Costa, and L. Maciel, „Network design requirements for disaster resilience in IaaS clouds,” *IEEE Commun. Mag.*, vol. 52, no. 10, pp. 52–58, 2014.
- [12] A. Xie, X. Wang, and S. Lu, „Risk Minimization Routing Against Geographically Correlated Failures,” *IEEE Access*, vol. 7, pp. 62920–62929, 2019.
- [13] A. Kushwaha, D. Kapadia, A. Gumaste, and A. Somani, „Designing Multi-Layer Provider Networks for Circular Disc Failures,” in *International Conference on Optical Network Design and Modeling (ONDM)*, (Dublin, Ireland), May 2018.
- [14] H. Zang, C. Ou, and B. Mukherjee, „Path-protection routing and wavelength assignment (RWA) in WDM mesh networks under duct-layer constraints,” *IEEE/ACM Transactions on Networking (TON)*, vol. 11, no. 2, pp. 248–258, 2003.
- [15] P. K. Agarwal, A. Efrat, S. K. Ganjugunte, D. Hay, S. Sankararaman, and G. Zussman, „The resilience of WDM networks to probabilistic geographical failures,” *IEEE/ACM Trans. Netw.*, vol. 21, no. 5, pp. 1525–1538, 2013.
- [16] M. T. Gardner and C. Beard, „Evaluating geographic vulnerabilities in networks,” in *IEEE Int. Communications Quality and Reliability Workshop (CQR)*, pp. 1–6, 2011.
- [17] S. Trajanovski, F. Kuipers, P. Van Mieghem, *et al.*, „Finding critical regions in a network,” in *IEEE Conference on Computer Communications Workshops (INFOCOM WKSHPS)*, pp. 223–228, IEEE, 2013.
- [18] B. Chazelle and H. Edelsbrunner, „An optimal algorithm for intersecting line segments in the plane,” *Journal of the ACM (JACM)*, vol. 39, no. 1, pp. 1–54, 1992.
- [19] J. P. Snyder, *Map projections: A working manual*, vol. 1395. U.S. Government Printing Office, 1987.

- [20] T.-H. Su and R.-C. Chang, „The k -Gabriel graphs and their applications,” in *Algorithms. Lecture Notes in Computer Science, vol. 450.*, (Berlin, Heidelberg), 1990.
- [21] F. Aurenhammer, „Voronoi diagrams: a survey of a fundamental geometric data structure,” *ACM Computing Surveys (CSUR)*, vol. 23, no. 3, pp. 345–405, 1991.
- [22] S. Orłowski, R. Wessälly, M. Pióro, and A. Tomaszewski, „SNDlib 1.0: survivable network design library,” *Networks*, vol. 55, no. 3, pp. 276–286, 2010.
- [23] H.-W. Lee, E. Modiano, and K. Lee, „Diverse routing in networks with probabilistic failures,” *IEEE/ACM Trans. Netw.*, vol. 18, no. 6, pp. 1895–1907, 2010.
- [24] M. Rahnamay-Naeini, J. E. Pezoa, G. Azar, N. Ghani, and M. M. Hayat, „Modeling stochastic correlated failures and their effects on network reliability,” in *IEEE Int. Conf. on Comp. Comm. and Networks (ICCCN)*, pp. 1–6, 2011.
- [25] S. Trajanovski, F. A. Kuipers, A. Ilić, J. Crowcroft, and P. Van Mieghem, „Finding critical regions and region-disjoint paths in a network,” *IEEE/ACM Trans. Netw.*, vol. 23, no. 3, pp. 908–921, 2015.
- [26] O. Gold and R. Cohen, „Coping with physical attacks on random network structures,” in *IEEE ICC*, pp. 1166–1172, 2014.
- [27] X. Wang, X. Jiang, A. Pattavina, and S. Lu, „Assessing physical network vulnerability under random line-segment failure model,” in *IEEE High Performance Switching and Routing (HPSR)*, pp. 121–126, 2012.
- [28] H. Saito, „Analysis of geometric disaster evaluation model for physical networks,” *IEEE/ACM Trans. Netw.*, vol. 23, no. 6, pp. 1777–1789, 2015.
- [29] H. Saito, „Spatial design of physical network robust against earthquakes,” *J. Lightw. Technol.*, vol. 33, no. 2, pp. 443–458, 2015.
- [30] F. Iqbal and F. Kuipers, „Spatiotemporal Risk-Averse Routing,” in *IEEE INFOCOM Workshop on Cross-Layer Cyber Physical Systems Security (CPSS)*, 2016.
- [31] „US National Seismic Hazard Maps.” Accessed: 2014.
- [32] E. Papadopoulou and M. Zavershynskiy, „The higher-order Voronoi diagram of line segments,” *Algorithmica*, vol. 74, no. 1, pp. 415–439, 2016.
- [33] A. Sieberg, „Erdebeben,” *Handbuch der Geophysic*, vol. 4, pp. 552–554, 1931.
- [34] „Network library.” Available: <https://github.com/jtapolcai/regional-srlg/tree/master/psrlg>.
- [35] H. Kanamori, „The energy release in great earthquakes,” *Journal of Geophysical Research (1896-1977)*, vol. 82, no. 20, pp. 2981–2987, 1977.
- [36] J. K. Gardner and L. Knopoff, „Is the sequence of earthquakes in Southern California, with after-shocks removed, Poissonian?,” *Bulletin of the Seismological Society of America*, vol. 64, pp. 1363–1367, 1974.

Publikációk

Az alábbiakban a disszertáció szerzője eddigi tanulmányainak felsorolása következik. A dolgozatban bemutatott eredményeket tartalmazó cikkeket a \bullet szimbólummal jelöltem. Az előzményeket és az ezekhez a cikkekhez szorosan kapcsolódó munkákat a \circ szimbólummal jelöltem. Végül a disszertációhoz lazán vagy nem kapcsolódó tanulmányokat a \circ szimbólummal jeleztem. Valamennyi tanulmány szakértői bírálaton esett át, kivéve azokat, amelyek jelenleg bírálat alatt állnak.

Könyvfejezetek

- [B1] \bullet **B. Vass**, J. Tapolcai, D. Hay, J. Oostenbrink, F. A. Kuipers, „How to Model and Enumerate Geographically Correlated Failure Events in Communication Networks”, in Guide to Disaster-Resilient Communication Networks, Springer, 2020
- [B2] \bullet T. Gomes, L. Martins, R. Girao-Silva, D. Tipper, A. Pašić, **B. Vass**, L. Garrote, U. Nunes, M. Zachariasen, J. Rak, „Enhancing Availability for Critical Services”, in Guide to Disaster-Resilient Communication Networks, Springer, 2020
- [B3] \bullet T. Gomes, D. Santos, R. Girão-Silva, L. Martins, B. Nedic, M. Gunkel, F. Dikbiyik, **B. Vass**, J. Tapolcai, J. Rak, „Disaster-Resilient Routing Schemes for Regional Failures”, in Guide to Disaster-Resilient Communication Networks, Springer, 2020

Folyóiratcikkek

- [J1] \bullet **B. Vass**, E. Bérczi-Kovács, and J. Tapolcai, „Enumerating Maximal Shared Risk Link Groups of Circular Disk Failures Hitting k Nodes”, IEEE-ACM Transactions on Networking, 2021
- [J2] \bullet A. Pašić, R. Girão-Silva, F. Mogyorósi, **B. Vass**, T. Gomes, P. Babarcsi, P. Revisnyei, J. Tapolcai, J. Rak „eFRADIR: An Enhanced FRAmework for DIaster Resilience”, IEEE Access, 2021
- [J3] \bullet **B. Vass**, J. Tapolcai, Z. Heszberger, J. Bíró, D. Hay, F. A. Kuipers, J. Oostenbrink, A. Valentini, L. Rónyai, „Probabilistic Shared Risk Link Groups Modelling Correlated Resource Failures Caused by Disasters”, IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 2021
- [J4] \bullet J. Tapolcai, L. Rónyai, **B. Vass**, and L. Gyimóthi, „Fast Enumeration of Regional Link Failures Caused by Disasters with Limited Size”, IEEE-ACM Transactions on Networking, 2020
- [J5] \bullet **B. Vass**, L. Németh, J. Tapolcai, „The Earth is Nearly Flat: Precise and Approximate Algorithms for Detecting Vulnerable Regions of Networks in Plane and on Sphere”, Networks, Wiley, 2020

Konferenciatickek

- [C1] \circ **B. Vass**, E. Bérczi-Kovács, C. Raiciu, G. Rétvári, "Compiling Packet Programs to Reconfigurable Switches: Theory and Algorithms", P4 Workshop in Europe (EuroP4 '20), Barcelona, Spain, 2020
- [C2] \circ B. Németh, Y.-A. Pignolet, M. Rost, S. Schmid, **B. Vass**, „Cost-Efficient Embedding of Virtual Networks With and Without Routing Flexibility”, IEEE IFIP Networking, Paris, France, 2020
- [C3] \circ D. Haja, **B. Vass**, L. Toka, „Towards making big data applications network-aware in edge-cloud systems”, IEEE 8th International Conference on Cloud Networking (CloudNet), Coimbra, Portugal, 2019

- [C4] ● A. Valentini, **B. Vass**, J. Oostenbrink, L. Csák, F. A. Kuipers, B. Pace, D. Hay and J. Tapolcai, „Network Resiliency Against Earthquakes”, IEEE Int. Workshop on Resilient Networks Design and Modeling (RNDM), Nicosia, Cyprus, 2019
- [C5] ● A. Pašić, R. Girao-Silva, **B. Vass**, T. Gomes, F. Mogyorósi, P. Babarczi, J. Tapolcai, „FRADIR-II: An Improved Framework for Disaster Resilience”, IEEE Int. Workshop on Resilient Networks Design and Modeling (RNDM), Nicosia, Cyprus, 2019
- [C6] ○ D. Haja, **B. Vass**, L. Toka, „Improving Big Data Application Performance in Edge-Cloud Systems”, IEEE 12th International Conference on Cloud Computing (CLOUD), Milan, Italy, 2019
- [C7] ● **B. Vass**, L. Németh, A. de Sousa, M. Zachariasen and J. Tapolcai, „Vulnerable Regions of Networks on Sphere”, IEEE Int. Workshop on Resilient Networks Design and Modeling (RNDM), Longyearbyen (Svalbard), Norway, 2018.
- [C8] ● A. Pašić, R. Girão-Silva, **B. Vass**, T. Gomes, and P. Babarczi, „FRADIR: A Novel Framework for Disaster Resilience”, IEEE Int. Workshop on Resilient Networks Design and Modeling (RNDM), Longyearbyen (Svalbard), Norway, 2018.
- [C9] ● J. Tapolcai, **B. Vass**, Z. Heszberger, J. Biró, D. Hay, F. A. Kuipers, and L. Rónyai, „A Tractable Stochastic Model of Correlated Link Failures Caused by Disasters”, in Proc. IEEE INFOCOM, Honolulu, HI, USA, 2018.
- [C10] ● J. Tapolcai, L. Rónyai, **B. Vass**, and L. Gyimóthi, „List of Shared Risk Link Groups Representing Regional Failures with Limited Size”, in Proc. IEEE INFOCOM, Atlanta, GA, USA, 2017
- [C11] ● **B. Vass**, E. Bérczi-Kovács, and J. Tapolcai, „Enumerating Shared Risk Link Groups of Circular Disk Failures Hitting k nodes”, in Proc. International Workshop on Design Of Reliable Communication Networks (DRCN), Munich, Germany, 2017.
- [C12] ● **B. Vass**, E. Bérczi-Kovács, and J. Tapolcai, „Enumerating Circular Disk Failures Covering a Single Node”, in Int. Workshop on Resilient Networks Design and Modeling (RNDM), Halmstad, Sweden, 2016.
- [C13] ● **B. Vass**, E. Bérczi-Kovács, and J. Tapolcai, „Shared Risk Link Group Enumeration of Node Excluding Disaster Failures”, in Int. Conference on Networking and Network Applications (NaNA), Hakodate (Hokkaido), Japan, 2016. Winner of Best Paper Award.

Poszterek, tézisek, és egyéb publikációk

- [P1] ● **B. Vass**, “Shared Risk Link Groups of Disaster Failures,” in IEEE Conference on Computer Communications Student Poster (INFOCOM Poster), 2016.
- [T1] ● **B. Vass**, “A Combinatorial Geometric Approach for Network Attack Analysis,” M.Sc. Thesis (Advisors: E. Bérczi-Kovács and A. Kőrösi), ELTE, Budapest, Hungary
- [O1] ● **B. Vass**, “Hálózatok legfennebb r sugárban ható hibáinak felsorolása” 1st prize at the Scientific Students’ Associations conference 2015 organized by the Mathematical Institute of the Eötvös Loránd University (in Hungarian)

A Google Scholar alapján 2021 május 15-én ≥ 50 független hivatkozásom volt.